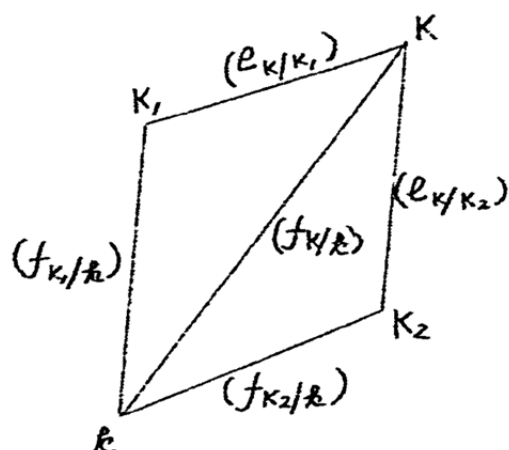


495 『整数論、一問題ニ就テ』

河田 敬 義 (東大學生)

k を有限次代數体, K_1, K_2 を k の有限次擴大体とす,
 $K_1 \cap K_2 = k$ とし, K_1, K_2 の Kompositum を K とす。
 K, K_1, K_2 及び k の Hauptordnung を夫々 O_K, O_{K_1}, O_{K_2}
 及び o とし O_K の Primideal を $\mathfrak{p}_K, O_{K_1}, O_{K_2}$ の o 上
 の \mathfrak{p}_K に対応する Primideal を夫々 $\mathfrak{p}_{K_1}, \mathfrak{p}_{K_2}$ とし,
 $N_{K/k} = f^{f_{K/k}}, \mathfrak{p}_K^{e_{K/k}} \parallel \mathfrak{p}_{K_1}$
 及び $\mathfrak{p}_K^{e_{K/k}} \parallel \mathfrak{p}_{K_2}$ である。
 以上 $e_{K/k}$ を次数分岐指数と表は
 すとす。



目標は $O_K = O_{K_1} \cdot O_{K_2}$ とな
 るための必要充分条件を探ら
 べし。

(A) 『 $O_K / \mathfrak{p}_K = (O_{K_1} \cdot O_{K_2}) / \mathfrak{p}_K$
 $= (O_{K_1} / \mathfrak{p}_{K_1}) \cdot (O_{K_2} / \mathfrak{p}_{K_2})$ ----- (1)』

以上 $e_{K/k}$ の必要充分条件は

$$f = \frac{f_{K_1/K_2} \cdot f_{K_2/K}}{f_{K_1/K} \cdot f_{K_2/K}}$$

トオケバ $f_{K/K} = f$ ナルコトデアイル』

(証明) $O_K \cong O_{K_1} \cdot O_{K_2}$ ヨリ

$$O_K / \mathfrak{P}_K \cong O_{K_1} \cdot O_{K_2} / \mathfrak{P}_K \text{-----}(2)$$

$$\text{又 } O_{K_1} \cdot O_{K_2} / \mathfrak{P}_K \cong (O_{K_1} / \mathfrak{P}_{K_1}) \cdot (O_{K_2} / \mathfrak{P}_{K_2}) \text{-----}(3)$$

トナル。

今 O/\mathfrak{P} 元ノ数ヲ g トスレバ, O_K / \mathfrak{P}_K 元ノ数ハ $g^{f_{K/K}}$ 等デアイルカラ (2)(3) ヨリ

$$\begin{aligned} \text{GF}(g^{f_{K/K}}) &\cong \text{GF}(g^{f_{K_1/K}}) \cdot \text{GF}(g^{f_{K_2/K}}) \\ &= \text{GF}(g^f) \text{-----}(4) \end{aligned}$$

トナル。故ニ $f = f_{K/K}$ ト (2)(3) ノ \cong ガ = トナルコトハ äquivalent デアル。

(注意) (3) ノ左辺カラ右辺ニウツスコトハ, 左辺ニテ

Restklasse, 代表トシテアラハレバ O_{K_1} 元ヲ

$O_{K_1} / \mathfrak{P}_{K_1}$ Restklasse, O_{K_2} 元ヲ $O_{K_2} / \mathfrak{P}_{K_2}$ Restklasse = オキカヘル。

Homomorphismus ナ得ラレル。故ニ (3) ナ等号, 成五ツコトハ, コレガ Isomorphismus デアルコトヲ示ス。コノ場合左辺ノ Nullklasse ノ元ハ $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$, $\mathfrak{P}_{K_1} / \alpha_i$ 又ハ $\mathfrak{P}_{K_2} / \beta_i$; ($i=1, \dots, n$) $\alpha_i \in O_{K_1}$, $\beta_i \in O_{K_2}$ トイフ形 = アラハキレバ。

[B] K ノ \mathfrak{P}_K -adische Erweiterung ヲ $K_{\mathfrak{P}_K}$ トシ, コノ \mathfrak{P}_K 等 O_K ノ \mathfrak{P}_K -adische Grenzmenge ヲ $(O_K)_{\mathfrak{P}_K}$ 等

≠表ハスコト=スル。

$$\llbracket (O_K)_{\mathfrak{p}_K} = (O_{K_1} \cdot O_{K_2})_{\mathfrak{p}_K} (= (O_{K_1})_{\mathfrak{p}_{K_1}} \cdot (O_{K_2})_{\mathfrak{p}_{K_2}}) \dots (5)$$

ナルタメノ必要充分条件ハ

$$f_{K/K} = f, \text{ 及 } \varrho_{K/K_1} = 1 \text{ 又ハ } \varrho_{K/K_2} = 1$$

ナルコトデアラル

(証明) 充分ナルコトハ (1) 式ノ成立ト $\mathfrak{p}_K // \pi_K$ ナル π_K ガ O_{K_1} 又ハ O_{K_2} ノ中ニトレルコトヨリ (5) ノ最初ノ等式ヲ得ル。

第二ノ等式ハ一般ニ成立ツ。即:

$$\begin{aligned} (O_{K_1} \cdot O_{K_2})_{\mathfrak{p}_K} &= (O_{K_1} \cdot O_{K_2}) \cdot O_{\mathfrak{p}} \\ &= (O_{K_1} \cdot O_{\mathfrak{p}}) \cdot (O_{K_2} \cdot O_{\mathfrak{p}}) = (O_{K_1})_{\mathfrak{p}_{K_1}} \cdot (O_{K_2})_{\mathfrak{p}_{K_2}} \dots (6) \end{aligned}$$

トナル。

必要ナルコトハ (5) ノ Einheit ヲ考ヘレバ (1) ガ成立チ $f = f_{K/K}$ トナル, 又最小ノ Bewertung ヲ與ヘル元ヲトレバ, $\mathfrak{p}_K // \pi_K$ ナル π_K ガ $O_{K_1} \cdot O_{K_2}$ 中ニモトメラレルコトカラ, [A] ノ (注意) = ヨリ、カコル π_K ハ O_{K_1} 又ハ O_{K_2} ノ中ニ求メラレネベナラナクナル, 故ニ $\varrho_{K/K_1} = 1$ 又ハ $\varrho_{K/K_2} = 1$ ヲ得ル。

(注意) (6) 式ヨリ (3) ⇒ 等号ノ成立ツコトガヲカル。

故ニ (1) ノ最後ノ等式ノ条件トハ何モ関係シナイ。

$$(c) \llbracket O_K = O_{K_1} \cdot O_{K_2} \dots (7)$$

ナルタメノ必要充分条件ハ O_K ノスベテノ *Primideal*

$\mathfrak{p}_K = \mathfrak{p}_i$ ナ

$$(O_K)_{\mathfrak{p}_K} = (O_{K_1} \cdot O_{K_2})_{\mathfrak{p}_K} \dots (8)$$



ナルコトデアル』

(証明) 必要ナルコトハ明カデアル。

充分ナルコトハ $\mathcal{F} = \prod_{i=1}^g \mathcal{P}_K^{(i)}$ トスレバ

$K \times \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \cong K \mathcal{P}_K^{(1)} + \dots + K \mathcal{P}_K^{(g)}$ デアルカラ (X , $+$ ハ直積及ビ直和)

$(\mathcal{O}_{K_1}, \mathcal{O}_{K_2}) \times \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \cong (\mathcal{O}_{K_1}, \mathcal{O}_{K_2}) \mathcal{P}_K^{(1)} + \dots + (\mathcal{O}_{K_1}, \mathcal{O}_{K_2}) \mathcal{P}_K^{(g)}$
 (8)ヨリ $= (\mathcal{O}_K) \mathcal{P}_K^{(1)} + \dots + (\mathcal{O}_K) \mathcal{P}_K^{(g)} \cong (\mathcal{O}_K) \times \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ トナリ

E. Noether, *Modulsatz** ヲヨリ (7) カ成立スル。

(* E. Noether: Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen; actualités -----, 1934. S. 11. § II. Hilfssatz 及ビ脚註)

[D] 『 $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K_1} \cdot \mathcal{O}_{K_2}$ ナルタメノ 必要充分条件ハ

$$(D_{K/K_1}, D_{K/K_2}) = 1 \text{ ----- (9)}$$

及ビ $\mathcal{P}_K / (D_{K_1/\mathcal{R}}, D_{K_2/\mathcal{R}}) \text{ ----- (10)}$

ナルスツテノ $\mathcal{P}_K = \mathcal{P}$ シテ

$$\mathcal{f} = \mathcal{f}_{K/\mathcal{R}} \text{ ----- (11)}$$

トナルコトデアル。』

但シ D_{K/K_1} 等ハ K カテ K_1 ハノ *Relativdiskriminant* 等ヲ表ハスモノトスル。

[E] 『 $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K_1} \cdot \mathcal{O}_{K_2}$ ナルタメノ 充分条件ハ

$$(D_{K_1/\mathcal{R}}, D_{K_2/\mathcal{R}}) = 1 \text{ ----- (12)}$$

ナルコトデアル』

(D, Eノ証明) [D]ハ \mathcal{P}_K ヲ (10) ナルモノニ等限ラズ \mathcal{O}_K ノ

スベテノ *Primideal* = ヲクルナラバ [B][C] ノ 直
接ノ結果ヲ得ル。

(10) 以外ノ \mathcal{K}_K テハ (11) ノ 成立ツコト, 及ビ (12) ヲ (9)
ヲ得ルコトハ

M. Moriya: Über einen Satz von Herbrand
北大理学部紀要 Ser. I. vol. IV. 1936. ヲリカ
ル。 —

[E] ハ D. Hilbert: Zahlbericht Satz 88, 及ビ
ソノ拡張。

K: Asano: Zur Diskriminante einer Algebra
(~~数学~~ 算報 vol. XII, 1935), §2. Satz 6 ヲ得ル。

—— (終) ——