494. 線形微分方程式ノ特異点, III

福原満洲雄（北大）

$$(1)\quad \frac{dy_j}{dx}=\lambda_j(x)y_j+x^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(x)y_k \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ニ於テ

$$\lambda_j(x)=\lambda_j^{(0)}x^{m_j}+\cdots\cdots+\lambda_j^{(m_j)} \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n';\ \lambda_j^{(0)}\neq 0)$$

$$\lambda_j(x)\equiv 0 \qquad (j=n'+1,\cdots\cdots,n)$$

$$(2)\quad a_{jk}(x)\sim\sum_{r=0}^{\infty}a_{jk}^{(r)}x^{-r} \qquad (j,k=1,2,\cdots\cdots,n)$$

トスル $a_{jk}(x)$ ノ漸近展開ハ

$$\theta_1\leqq \arg x\leqq\theta_2$$

デ成立シ，コノ範囲ニ特異ナ方向ガ唯一ツ存在スルモノトシ，ソレヲ ω デ表ハス。(1) ヲ形式的ニ満足スル級数

$$(3)\quad y_j\sim\sum_{r=0}^{\infty}\alpha_j^{(r)}x^{-r} \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ガ存在スル場合ニ $\theta_1\leqq\arg x\leqq\theta_2$ デ (3) ナル形ニ展開サレル (1) ノ解ガ存在スルコトヲ証明スルニハ今迄ノ存在定理ダケデハ不足ヲ感ズル。

ソノ理由カラ説明シテ行カウ。

$$\arg\lambda_j^{(0)}=\omega_j \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n')$$

ト置イタ時 $\cos((m_j+1)\theta+\omega_j)$ ノ $\theta=\theta_1,\theta_2$ ニ於ケル符号ニヨッテ四ツノ場合ヲ生ズル、番号ヲ適当ニツケテ

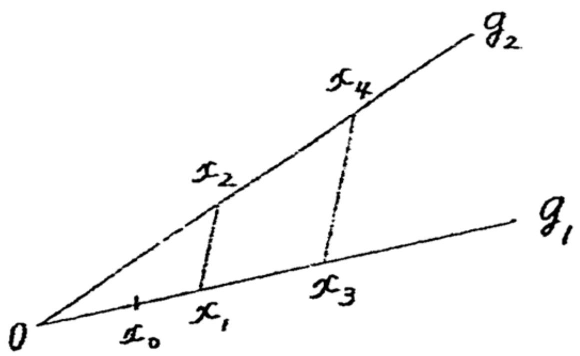
$$\cos((m_j+1)\theta+\omega_j)<0 \qquad (\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2;\ j=1,2,\cdots\cdots,n_1)$$

$$\cos((m_j+1)\theta_1+\omega_j)<0,\ \cos((m_j+1)\theta_2+\omega_j)>0$$
$$(j=n_1+1,\cdots\cdots,n_2)$$

$$\cos((m_j+1)\theta_1+\omega_j)>0,\ \cos((m_j+1)\theta_2+\omega_j)<0$$
$$(j=n_2+1,\cdots\cdots,n_3)$$

$$\cos((m_j+1)\theta+\omega_j)>0 \qquad (\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2;\ j=n_3+1,\cdots\cdots,n')$$

トスル。圖ニ於テ Og_1, Og_2 ハ實軸ト夫々 θ_1, θ_2 ナル角ヲナス直線, x_1x_2, x_3x_4 ハ實軸ト θ_0 ナル角ヲナス直線デアル。θ_0, θ_1, θ_2 ヲ特異ナ方向 ω ニ十分ニ近ク取ツテ置ケバ $\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2$ デ



$$\cos(m_j\theta+\theta_0+\omega_j) \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n')$$

ハ0トナラナイカラサウ假定シテオク。$\theta_1\leqq\arg x\leqq\theta_2$ デ(3)ナル形ニ展開サレル(1)ノ解ヲ唯一ツニキメル條件トシテ最モ簡單ナノハ

$$(4)\qquad y_j(x_0)=y_j^0 \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n_1)$$

デアル、ソコデ前回ノヤウニ

$$y_j=\sum_{r=0}^{N-1}\alpha_j^{(r)}x^{-r}+z_j,\quad z_j=e^{\Lambda_j(x)}u_j$$
$$(\Lambda_j(x)=\int\lambda_j(x)\,dx)$$

ト置キ, $u_1,\cdots\cdots,u_n$ ニ關スル方程式

(5) $$\frac{du_j}{dx} = \left\{ x^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) e^{\Lambda_k(x)} u_k + b_j(x) \right\}$$

$(j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$

ヲ考ヘル、條件(4)ハ

(6) $$u_j(x_0) = u_j^0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n_1)$$

トナル。但シ $u_1^0, \cdots\cdots, u_{n_1}^0$ ハ

$$y_j^0 = \sum_{r=0}^{N-1} \alpha_j^{(r)} x_0^{-r} + z_j^0, \quad z_j^0 = e^{\Lambda_j(x_0)} u_j^0$$

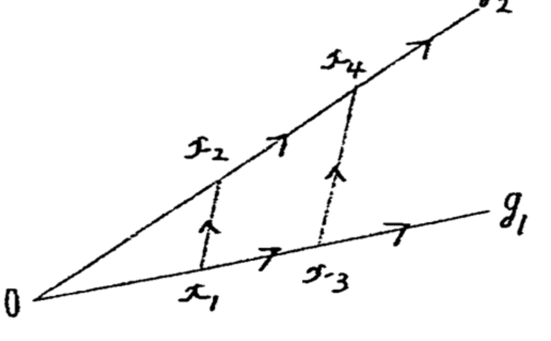
$(j = 1, 2, \cdots\cdots, n_1)$

ニ依ツテキメル、ソコデ(5)ガ(6)及ビ

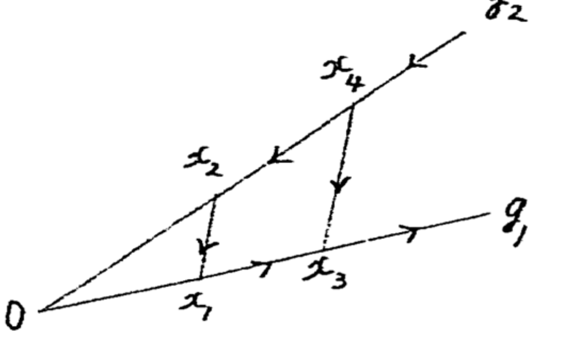
(7) $$|u_j| \leqq K \left| x^{-N+p} e^{\Lambda_j(x)} \right| \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ヲ満足スル解ヲ唯一ツ持ツコトヲ証明スレバ後ハ例ニヨツテ例ノ如シデアルガ，ソノヤウナ解ノ存在ヲ証明スルノガ問題デアル。

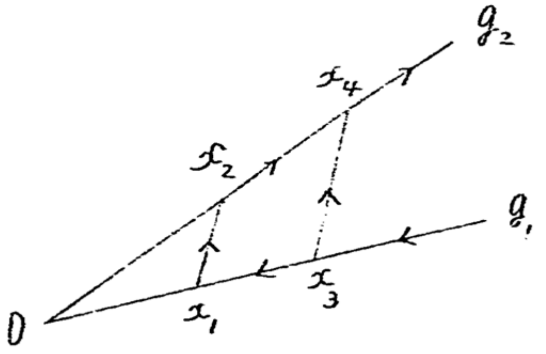
$g_1 x_1 x_2 g_2$ 及ビ $x_3 x_4$ ノ上デ(7)ノ右辺ガ増加スル方向ヲ矢デ示セバ次ノ圖ノヤウニナル。コレデハ $g_1 x_1 x_2 g_2$ ノ上デ拙著，常微分方程式論(岩波講座)定理27ヲ使ヘナイ。



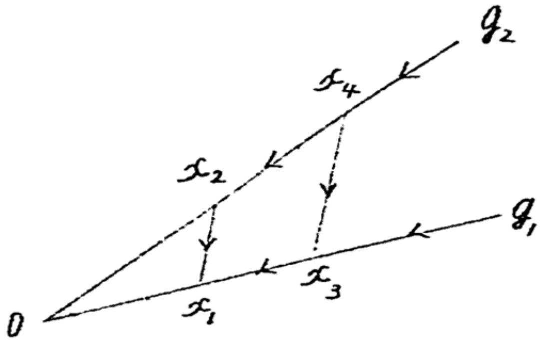
$(1 \leqq j \leqq n_1)$



$(n_1 < j \leqq n_2)$



$(n_2<j\leqq n_3)$



$(n_3<j\leqq n)$

何故カト言ヘバ $g_2x_2x_1g_1$ ヲ實軸上ノ區間 $\alpha<t<\beta$ ニ對應サセタトスレバ $1\leqq j\leqq n_1$ ノ場合ニハ x_1 ニ對應スル t ノ値 t_1 ニ於テ u_j ノ値ヲ與ヘ，$n_1<j\leqq n_2$ ノ場合ニハ $t=\alpha$ ニ於テ，$n_2<j\leqq n_3$ ノ場合ニハ $t=\beta$ ニ於テ條件ヲ與ヘルコトニナリ不都合ハナイが，最後ノ場合ニハ $t=\alpha$ 及ビ $t=\beta$ ニ於テ條件ヲ與ヘルコトニナルカラ行詰ッテ了フノデアル。ソレデハドウイフ存在定理ヲ使ヘバヨイノデアルカ、ソノ定理ハ次ノヤウニ述ベラレル。

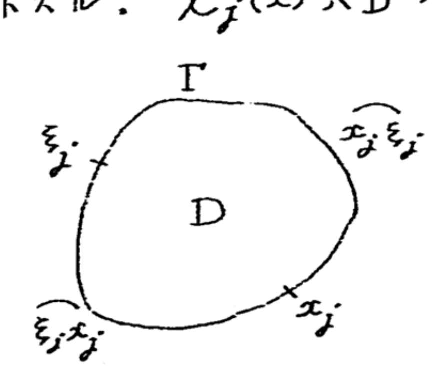
「微分方程式

(8) $$\frac{dy_j}{dx}=f_j(x,y_1,\dots\dots,y_n)\qquad (j=1,2,\dots\dots,n)$$

ニ於テ x が閉曲線 Γ デ囲マレタ領域 D ニ屬シ，且ツ

(9) $$|y_j|\leqq|\chi_j(x)|\qquad (j=1,2,\dots\dots,n)$$

ナルトキ正則，ソノ縁ヲ含メテ連続トスル．$\chi_j(x)$ ハ D デ正則，$\overline{D}$ デ連続デ 0 ニナラナイ函数デアル。x_j,ξ_j ハ Γ ノ上ニ與ヘラレタ点デ（右圖参照），t ハ Γ ノ上ニキマッタ点 x_0 カラ Γ ノ



弧 $\widehat{x_0 x}$ ヲ正ノ方向ニ計ツタ長サ，y_j^0 ハ

$$|y_j^0| \leqq \chi_j(x_j) \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ヲ満足スルヤウニ與ヘラレタ數ヲ更ニ $x=x(t)$ ガ $\widehat{x_j \xi_j}$ ノ上ニアリ，$y_1,\cdots\cdots,y_n$ ガ (9) ヲ満足スルトキ

$$\frac{d}{dt}|\chi_j(x)| > |f_j(x,y_1,\cdots\cdots,y_n)|$$

$$(j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

$x=x(t)$ ガ $\widehat{\xi_j x_j}$ ノ上ニアリ，$y_1,\cdots\cdots,y_n$ ガ (9) ヲ満足スルトキ

$$-\frac{d}{dt}|\chi_j(x)| > |f_j(x,y_1,\cdots\cdots,y_n)|$$

$$(j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ガ成立スルモノトスル、ソノトキ

$$y_j(x_j) = y_j^0 \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ヲ満足シ，D デ正則，$\overline{D}$ デ連續ナ (8) ノ解ガ存在スル。若シ

$$|y_j^0| < |\chi_j(x_j)| \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナラバソノ解ハ $\overline{D}$ デ

$$|y_j| < |\chi_j(x)| \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ヲ満足スル』

証明略ス。　此ノ定理ヲ $x_1 x_2 x_3 x_4$ デ囲マレタ領域ニ應用シ，然ル後 $x_3 x_4$ ヲ ∞ ニ近ヅケレバ我々ノ目的ハ達セラレル。コノヤウニシテ $\theta_1 \leqq \arg x \leqq \theta_2$ ガ特異ナ方向ヲ含ム場合モ片ガ付イテ了フ。結局 Trjitzinski, Q curves, *Regions* R ナドヲ考ヘナイデ最後ノ結論ニ達シ得ルノデアル。コノヤウニシテ得ラレタ定理ハ *Trjitzinski* ノ *fundamental theorem* ヨリワカリヨクテヨイ結果ニナッテ居リ，証明モ簡単デアルト思フ。