488. 第二階微分方程式ニ就テ

南雲　道夫（阪大）

1　一般ノ第 n 階常微分方程式ニ於テ n 個ノ與ヘラレ

タル点ヲ通ルヤウナ積分曲線ニ関スル存在定理ニツイテハ，本紙第106号ニ於テ福原氏ノ方法ヲ変形シテ，之レニ関スルーツノ端緒ヲ得タ。

然シ一般ニ此ノ方法デハ，n個ノ点ノ分布ニツイテノ條件（不等式）ガ可ナリ強クナル恐レモアル。従ッテ微分方程式自身ガ或ル特殊ナ條件ヲ満足スル場合ニハ，ムシロ多少 *topologisch* ナ考察ヲ加味シタ方法ニヨリ，ヨリ広イ範囲ニ於ケル存在定理ガ得ラレ様．此ノ意味ニ於テ中野博士ノ論文 *Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*（東京帝大理學部紀要 Vol. III. 1934）ハ示唆ニ富メル名著デアラウ。

然シ中野博士ノ方法ハ氏ノ所謂 *Eigentlichkeit* ナル概念ヲ基礎トスルモノデアルカラ，種々ナ具体的問題ニ於テモソノ領域ヲ定ムルコトガ困難デアル（充分小サナ領域ニスレバヨイガ）ノミナラズ，氏ノ之レニ関スル定理（Kapitel 5. Satz 16）ガ *ganze Differentialgleichung*〔$a<x<b$ $-\infty<y^{(i)}<+\infty$ ヲ領域トシ，スベテノ解ガ全區間 $a<x<b$ デ存在スルモノ〕ニ限ラレテヰルコトモ應用上不便ナ場合ヲ生ズル。我々ハ(x, y)ニ関シテ有界ナ領域ニ於ケル（アマリ小サクナイ）存在定理ガホシクナルノデアル。（之ハ中野氏ノ論文ヲ拝見シテカラ出テ來タ慾ノ虫ノ言ヒ草デアルケレドモ）

慾ハ深ク望ミハ大キイノデアルガ，如何ンセン知識ハアマリニ浅ク、能力ハアマリニ小サイノデ，諸賢ノ御助力ヲ

旅ッ他ハナイ。ソコデ特ニ第二階ノ場合ニツイテ得ターツノサヽヤカナ結果ヲ御報告シテ識者ノ関心ニ訴ヘントスルノデアル。

[2] 第二階微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,y') \qquad \left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$$

ニ於テ $f(x,y,y')$ ハ領域 $\mathfrak{D}\times(y')$ 即チ

$$\begin{cases} a \leqq x \leqq b, \quad \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x) & [\text{之ヲ } \mathfrak{D} \text{ トスル}] \\ -\infty < y' < +\infty \end{cases}$$

ニ於テ連続微分可能トスル。次ニ更ニ

(1) $\mathfrak{D}\times(y')$ ニ於テ $|f(x,y,y')| \leqq g(|y'|)$

$[g(u)>0]$

且ツ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{du}{g(u)}=+\infty$、 [例ヘバ $g(u)=A+Bu$]

(2) $\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ ハ連続微分可能且ツ区分的ニ (Stückweise) 二回微分可能デ

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\omega}''(x) < f(x,\overline{\omega}(x),\overline{\omega}'(x)) \\ \underline{\omega}''(x) > f(x,\underline{\omega}(x),\underline{\omega}'(x)) \end{array}\right\} \quad (a \leqq x \leqq b)$$

ナル二ツノ條件ガ成リ立ツモノト假定スル。

上ノ條件ガ成立スルトキハ $\mathfrak{D}$ 内ノ任意ノ二点 (x_1, y_1) 及ビ (x_2, y_2) [但シ、$x_1 < x_2$ トスル!] ヲ通ル積分曲線ガ $\mathfrak{D}$ 内ニ存在スル。

次ニ上ノ定理ノ証明ノスヂミチヲ述ベヤウ。

條件(1)カラ先ヅ積分曲線ハ $\mathfrak{D}$ ノ境界ニ衝突スルマデ

常ニ $\mathfrak{D}$ 内ニ存在スルコトガ証明出來ル。〔例ヘバ $y''=|y'|^{\frac{3}{2}}$ ニツイテハ積分ハ有限ナ (x, y) デ行止リトナル〕故ニ $\mathfrak{D}$ 内ノ積分曲線ハ必ズ境界ト点ヲ共有スル。

次ニ (2) ノ條件ニヨリ，積分曲線ハ境界上ノ一点ニ於テ之レニ切スルコトガ出來ナイ。從ツテ積分曲線ハ必ズ境界ト交ハル（切シナイデ）。故ニソノ交点 (X_ω, y_ω) ハ $y'(X_1)$ ノ連続函数デアル。（今 (X_1, y_1) ヲ通ル積分曲線ノミヲ考ヘル）

更ニ條件 (1) ニヨリ

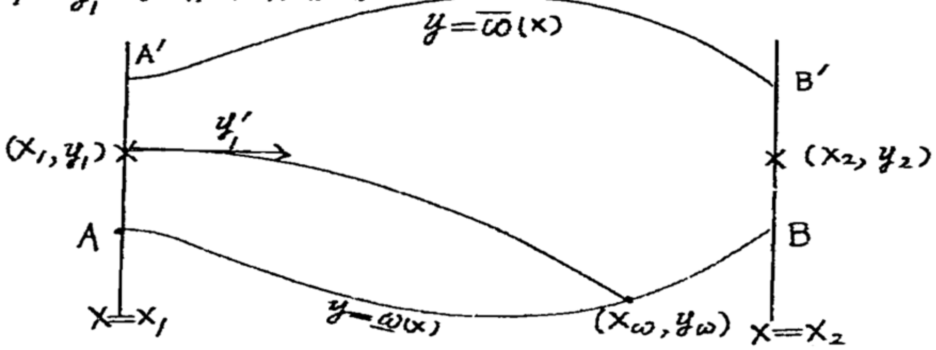
$$\lim_{y_1'\to\pm\infty} X_\omega = X_1, \qquad \lim_{y_1'\to-\infty} y_\omega = \underline{\omega}(X_1),$$

$$\lim_{y_1'\to+\infty} y_\omega = \overline{\omega}(X_1)$$

ナルコトガ証明出來ル。

所デ $X_1 = a$, $X_2 = b$ ト假定シテヨイカラ（$\mathfrak{D}$ ノ幅ヲ縮メルニスギナイ），

y_1' ガ $-\infty$ カラ $+\infty$ マデ単調ニ変化スレバ点 (X_ω, y_ω) ハ連続的ニ図ノ曲線 $ABB'A'$ ヲバ A カラ A' マデ動ク。從ツテソノ途中ニ於テ (X_ω, y_ω) ガ (X_2, y_2) ト一致スルヤウナ y_1' ガ存在スル。



$\boxed{3}$ 以上ノ定理ハ存在定理デアルガ一意性ニツイテハ何モ言ヘナイ。反例ヲ挙ゲルコトモ容易デアル。

尚ホ領域ニ関シテ $-\infty < y' < +\infty$ ヲバ有界ニ改メル(従ッテ $\mathfrak{D}$ ニモ条件ガ加ハル)コトモ可能デアル。又 (1) ヲ緩メテ拡張スルコトモ出來ルデアラウ。

更ニ問題ヲ n 次元ノ場合ニ拡張シテ(同様ナ方法ヲ用ヒテ)類似ノ結果ヲ得ルコトモ出來ル。

スベテ、カヽル拡張ハ追々有志ノ諸彦ト共ニ研究シ，本紙ニ発表シテ行キタイ。諸彦ノ御援助ヲ切望スル次第デアル。