483. 第n階微分方程式ニ就テノ注意

南雲　道夫（阪大）

$\boxed{1}$ 第n階微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x, y, y', \cdots\cdots, y^{(n-1)})$$

ノ積分デ，與ヘラレタルn個ノ点(ξ_i, η_i) $(i=1,\cdots\cdots,n)$ヲ通ルモノニ就テノ存在及ビ一意性ニ関スル研究ニハ，（平素無精ナ自分ニハ）アマリ文献ガナサソウニ思ハレル。

之レニツイテハ福原氏ノ常微分方程式論（岩波講座）131頁——133頁ニ少シバカリ論ゼラレテヰル。

ソノ始メノ部分ニ於テ、福原氏ハ Lagrange ノ補間

法ヲ利用シタル一種ノ線狀変換ニヨリ，問題ノ第n階ノ方程式ヲバ聯立一階ノ方程式デ

$$y_i(\xi_i) = \eta_i$$

ナル境界條件ノ問題ニ轉換シ得ルコトヲ示サレタ。

$\boxed{2}$ 福原氏ノ此ノ着想ハ優秀ナルニモカヽハラズ，氏ガ之レヲ軽視サレタタメカ，氏ガ與ヘラレタ変換式ハ第一式ヲ除イテ具合ノ悪イモノニナツテヰル。氏ノ與ヘラレタ変換デハ逆変換ガ $x = \xi_i$ ニ於イテ不連続トナル憾ガアル。ソコデ第二式以下ヲ次ノ様ニ改ムレバ有効ナ変換ガ得ラレル。

$$\varphi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{X - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$$

トシテ

$$\left.\begin{aligned} y &= \sum_i \varphi_i(X)\, y_i \quad \cdots\cdots (\text{Lagrange ノ補間式}) \\ y' &= \sum_i \varphi_i'(X)\, y_i \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} &= \sum_i \frac{\varphi_i^{(n-1)}(X)}{(n-1)!}\, y_i \end{aligned}\right\} \qquad \left[\frac{\varphi_i^{(n-1)}(X)}{(n-1)!} = 1\right]$$

ナル線狀変換ヲホドコセバ $(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ ノ係数ニ關スル行列式ハ

$$\frac{-1}{\prod_{i>j}(\xi_i - \xi_j)} = \text{const.} \neq 0$$

與ヘラレタ微分方程式ハ

$$\frac{dy_i}{dx}=(-1)^{j-1}(x-\xi_i)^{n-1}f(x,\sum_j g_j y_j,\sum_j g'_j y_j \cdots\cdots,\sum_j y_j)$$

ナル聯立一階微分方程式ニ変換サレル。 故ニ求ムル積分ハ

$$y_i(x)=\eta_i+(-1)^{j-1}\int_{\xi_i}^{x}(x-\xi_i)^{n-1}f(x,\sum g_j y_j,\cdots\cdots,\sum y_i)dx$$

$$(i=1,\cdots\cdots\cdots,n)$$

ナル聯立方程式ヲ解クコトト一致スル。

上ニ得ラレタ結果ハ割合ニ簡単デアルカラ、之レニヨッテ存在條件ヤ一意性ヲ論ズルコトハ比較的ニ有效デアルト思ハレル。

$\boxed{3}$ 上ノ変換ノ細カイ途中ノ計算ハ行列式ノ演習問題トシテ面白イガ，本論トシテハソノ結果ガ比較的ニ簡單ナルコトヲ注目スルニ止メテ置ク。

次ニ之レカラ如何ニシテ，最モヨキ評價ニヨル存在定理ヤ一意性ノ條件ヲ導出スベキカガ問題デアル。之ニツイテハ諸彦ノ御助力ヲ仰グ次第デアル。

尚上ノ方法ト福原氏ノ書 §44 ノ後半トノ関係ヲ考ヘテ見ルニ，未ダソノ相互ニハ密接ナ関係ガ無イラシク思ヘル。§44 ノ後半ノ所論ハ線状方程式ニ関スル限リ，一意性及ビ存在條件ヲ與ヘルケレドモ（一次方程式論ニ於ケル *homogen* ト *nicht-homogen* トノ相互関係〔*Alternative*〕ニヨル）一般ノ非線状方程式ニツイテハ一意性ヲ與ヘテモ存在條件ヲ與ヘルカドウカハ不明デアル。殊ニソコニ用ヒラレ

タ方法ハ *Rolle* ノ定理ヲ基礎トスルモノデアルカラ，複素數値ヤ *Vektor* トナル函數ニハ應用出來ナイ。之レニ反シ此處ノ方法ニヨレバ，複素數値デモ *Vektor* デモ差支ヘハナイト思フ。