482. Quasi-analytic class of functions. I

河田龍夫（＝高橋韻夫）（東北大）

是カラ証明セントスル定理ハ次ノモノデアル。即チ

Theorem 1. $p(x)$ ヲ $(0, \infty)$ デ define サレタ positive function トシ且ツ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p(|x|)}|x|^n dx < \infty \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

トスル。

$1 \leqq p \leqq 2$ ナルアル p ニ對シテ $f(x)$ ハ $L_p(-\infty, \infty)$ ニ屬スルトスル、更ニ $f(x)$ ハ無限回 differentiable デソノ Fourier transform ヲ $F(x)$ トスル. 即チ

$$F(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} dt$$

然ルトキ殆ンドスベテノ x ニ對シテ

$$|F(x)| < A e^{-p(|x|)} \qquad (A \text{ ハ常數デアル})$$

ガ成立スル如キ $f(x)$ ノ class ガ quasi-analytic ナルタメニハ

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(|x|)}{1+x^2} dx$$

ノ diverge スルコトガ必要充分デアル。

コノ定理ハ quasi-analytic class ノ理論ニオケル Paley-Wiener ノ fundamental theorem ノ immediate corollary デアル. 併シ上ノ定理カラ竹中, 泉両

氏ニヨツテ得ラレタ $\{t^n\}$ ノ $(-\infty,\infty)$ ニ於ケル closure ノ定理ヲ更ニ完全ナ形ニ於テ証明出來ルコトト、更ニ Mandelbrojt ノ定理（periodic function ノ Fourier coeff. ニアル order ノ制限ノアル如キ函數ノ class ガ quasi-analytic ナルタメノ條件ヲ求メタモノ）モ直チニ定理 I カラ得ラレルトイフ以上二ツノ事柄ニヨリ上ノ定理ハ興味アルモノト思ハレル。

念ノタメニ Paley-Wiener ノ定理ヲ掲ゲテオク。

<u>Theorem</u>. (Paley-Wiener). $\phi(x)$ ガ real non-negative デ $-\infty<x<\infty$ デ zero ニ equivalent デナイトスル、且ツ $(-\infty,\infty)$ デ L_2 ニ屬スルトスル。然ルトキ次ノ條件ヲ満足スル如キレーツノ real 或ハ complex valued function $g(x)$ ガ exist スルタメニハ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log\phi(x)|}{1+x^2}\,dx<\infty$$

ナルコトガ必要且ツ充分デアル。$g(x)$ ノ満足スベキ條件トハ

(i) アル x_0 ニ對シテ $g(x)=0$ for $x\geqq x_0$ 且ツ zero ニ equivalent デナイ。

(ii) $g(x)$ ノ Fourier transform ヲ $G(x)$ トスルト $|G(x)|=\phi(x)$

<u>Theorem I ノ証明</u>.

1°. (1) ノ diverge スルコトノ必要ナコト。

モシ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(|x|)}{1+x^2}dx<\infty$$

ナラバ上ノ Paley-Wiener's Theorem カラーツノ $f(x)$ ガ exist シ $f(x)=0$ for $x\geqq x_0$, 且ツ $f(x)$ ノ Fourier transform ヲ $F(x)$ トスルト

(2) $\quad |F(x)|=e^{-p(|x|)}$

$F(x)$ ノ Fourier transform ハ $f(x)$ = equivalent デ之ヲ $f_1(x)$ トスレバ

$$f_1(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-itx}dt,$$

且ツ (2) カラ $f_1(x)$ ハ infinitely often differentiable デ而モ $f_1(x)=0$ for $x\geqq x_0$ 故ニ必要ナルコトガ証明サレタ。

2°. (1) ノ diverge スルコトノ充分ナコト. 考フル functions ノ class ガ quasi-analytic デナイトシ コノ class ニ属シ. $f^{(n)}(0)=0$ デ identically = zero デナイ function $f(x)$ ガアルトスル。

アル x_1 ニ對シテ $f(x)$ ハ zero ニナラナイガ, コノ x_1 ヲ $x_1<0$ トシテオイテヨイ。

$$\text{今}\ f_1(x)=f(x)\quad \text{for}\ x<0$$
$$=0\quad \text{for}\ x\geqq 0$$

トスルト $f_1(x)$ ハ everywhere infinitely often differentiable デ f_1 ノ transform ヲ $F_1(x)$ トスルト

$$|F_1(x)|\leqq Ae^{-p(|x|)}$$

故ニ $0<p(|x|)\leqq \log A+\log|F_1(x)|$. 然ルニ Paley-

Wiener's theorem カラ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|F_1(x)||}{1+x^2}\,dx < \infty$$

故ニ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(|x|)}{1+x^2}\,dx < \infty \qquad (\text{証明了})$$

<u>Theorem 2.</u> $|f(x)| \leqq Ae^{-p(|x|)}$ (almost everywhere)

且ツ $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p(|x|)}|x|^n\,dx < \infty \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

トスル. 然ルトキ,モシ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x^n\,dx = 0 \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

ナラバ常ニ $f(x)=0$ (almost everywhere) ナルタメニハ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(|x|)}{1+x^2}\,dx = \infty$$

ナルコトが必要且ツ充分デアル。

充分ナル事. $f(x)$ ノ transform ヲ $g(x)$ トスルト

$$(3) \qquad g(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{itx}\,dt$$

$g(x)$ ノ transform ヲ $G(x)$ トスルト $G(x)=f(x)$

(almost everywhere)

仮定カラ $|G(x)| \leqq Ae^{-p(|x|)}$ (3) カラ

$$g^{(n)}(0) = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,t^n\,dt = 0$$

故ニ Theorem 1 ニヨリ $g(x)=0$ (alm. ev.) 随ッテ $G(x)=0$ (alm. ev.) 故ニ $f(x)=0$.

必要ナル事. $g(x)$ ノ class ハ上ニ示シタ如ク quasi-analytic ナル故ニ Theorem 1 ヨリ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(|x|)}{1+x^2}dx=\infty \qquad \text{(証明了)}$$

Mandelbrojt ノ Theorem モコンナ調子ニスグ証明サレル。証明ハ後ニ譲ラシテ頂キマス。