475. Principe de Schwarz ヲ満足スル函數ニ對スル一注意

井上正雄（阪大）

$f(z)$ ヲ複素數平面上ノ領域 Ω デ定義サレタ一價連續ナ複素函數トスル。

Ω ニ含マレル一點 z_0 ヲ中心トシテ Ω ニ含マレル任意ノ半徑 R ノ閉円 $R(z_0)$ ヲ画クトキ，$z \in R(z_0)$ ナル z ニ對シテ恒ニ

$$\left|f(z)-f(z_0)\right| \leqq M(z_0,R)\,\chi\left(\frac{|z-z_0|}{R}\right)$$

ガ成立スルトキ，$f(z)$ ハ z_0 ニテ $\chi(t)$ ニ關シテ Principe de Schwarz ヲ満足スルト云フ。[1]

但シココニ $\left\{\begin{array}{l} M(z_0,R)=\displaystyle\max_{z\in R(z_0)}|f(z)| \\ \chi(t) \text{ ハ } [0,1] \text{ デ定義サレタ } \chi(0)=0 \text{ ナル單調ニ増加スル連續實函數デアル。} \end{array}\right.$

$f(z)$ ガ Ω デ $\chi(t)$ ニ關シテ P. de S. ヲ満足スル函數トシ

---

1) M. Kondo: Sur les fonctions générales définies dans le domaine des nombres complexes II. (Proc. of the Imp. Acad. XII, 1936, No.4)

コノ論文デハ更ニ z ニ關スル polynôme $P(z)$ ニ f ヲ代入シタ函數 $P(f(z))$ ガ矢張リ Ω デ同ジ $\chi(t)$ ニ關シ，到ル處 P. de S. ヲ満足スルト假定シタトキ，得ラレル一聯ノ結果ガ發表サレテイル。

テモ，（コレダケデモ相當キツイ條件デアルガ），$\chi(t)=$ 以上ノ外何等ノ假定ナクシテハ，$f(z)$ ノ *propriété métrique* ヲ導キ出スコトハ少シ困難ナ樣デアル。

ソコデ今特ニ $\chi(t)$ ガ

$$\overline{D}_+\chi(0)<+\infty$$

ナル條件ヲ滿足スルモノト假定スレバ，（コレハ非常ニキツイ條件デアル）、之レニ對シ次ノ如キ結果ガ得ラレル。

定理 1.

$f(z)$ ガ Ω デ $\overline{D}_+\chi(0)<+\infty$ ナル $\chi(t)$ ニ關シテ殆ンド到ル處 P. de S. ヲ滿足スルモノトスレバ，$f(z)$ ハ Ω デ殆ンド到ル処全微分可能デアル。

（証）先ヅ Ω ガ有界ナル場合ヲ考ヘル。

$f(z)$ ガ P. de S. ヲ滿足スル点集合ヲ $\underline{\Omega}$ トスレバ，勿論 $m\underline{\Omega}=m\Omega$ デアル。

$\underline{\Omega}$ ノ一点 z ニヲイテ $R(z)\subset\Omega$ ナル如ク R ヲレットスレバ，

$z+\Delta z\in R(z)$ ニ對シテハ

$$\left|f(z+\Delta z)-f(z)\right|\leqq M(z,R)\,\chi\left(\frac{|\Delta z|}{R}\right)$$

$$\therefore\quad\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right|\leqq\frac{M(z,R)}{R}\cdot\chi\left(\frac{|\Delta z|}{R}\right)\Big/\frac{|\Delta z|}{R}$$

$$(0<|\Delta z|\leqq R)$$

$$\therefore\quad\mathcal{D}_f(z,R)=\underset{0<|\Delta z|\leqq R}{\text{O. G.}}\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right|$$

$$\leqq \frac{M(z,R)}{R} \cdot \underset{0<|\Delta z|\leqq R}{\mathrm{O.G.}} \left\{ \chi\left(\frac{|\Delta z|}{R}\right) \Big/ \frac{|\Delta z|}{R} \right\}$$

$$= \frac{M(z,R)}{R} \cdot \underset{0<t\leqq 1}{\mathrm{O.G}} \left\{ \frac{\chi(t)}{t} \right\}$$

シカルニ $\chi(t)$ ハ $[0,1]$ デ連続且ツ $\overline{D}_+\chi(0)<+\infty$ ナル故

$$\underset{0<t\leqq 1}{\mathrm{O.G}} \left\{ \frac{\chi(t)}{t} \right\}$$

ハ存在シ且ツ有限デアル。

之レヲ α トシヤウ。即チ

$$\underset{0<t\leqq 1}{\mathrm{O.G}} \frac{\chi(t)}{t} = \alpha < +\infty$$

然ラバ $\mathfrak{D}_f(z,R) \leqq \frac{M(z,R)}{R} \cdot \alpha$

今 $R > R_1 > R_2 > \cdots\cdots > R_n > \cdots\cdots > 0$ 且ツ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$

ナル正数列 $\{R_n\}$ ヲトレバ, $\mathfrak{D}_f(z, R_n)$ ノ定義ヨリ

$$\mathfrak{D}_f(z,R) \geqq \mathfrak{D}_f(z,R_1) \geqq \cdots\cdots \geqq \mathfrak{D}_f(z,R_n) \geqq \cdots\cdots > 0$$

ナル故

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{D}_f(z,R_n) = \mathfrak{D}_f(z) = \overline{\lim_{\Delta z\to 0}} \left| \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \right| \ (>0)$$

トスレバ

$$\mathfrak{D}_f(z) \leqq \frac{M(z,R)}{R} \cdot \alpha$$

即チ $\mathfrak{D}_f(z)$ ハ有限デアル。

従ツテ $\underline{\Omega}$ ニテ $\mathfrak{D}_f(z) < +\infty$ デアル。

次ニ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ トスレバ

$\underline{\Omega}$ ノ各点 $z=x+iy$ デ

$$\mathfrak{D}_u(x,y)\ \overline{\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}}\ \frac{u(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-u(x,y)|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\leqq \mathfrak{D}_f(z)<+\infty$$

ナル故 $\mathfrak{D}_u(x,y)$ ハ $\underline{\Omega}$ ノ各点デ有限デアル。

従ツテ Stepanoff－Rademacher ノ定理ニ(2) ヨリ $u(x,y)$ ハ $\underline{\Omega}$ デ殆ンド到ル処全微分可能デアル。$v(x,y)$ ニツイテモ全ク同様デアル。

故ニ $u(x,y)$, $v(x,y)$ ガトモニ全微分可能ナ点集合ヲ $\underline{\underline{\Omega}}$ トスレバ

$$m\,\underline{\underline{\Omega}}=m\,\underline{\Omega}=m\,\Omega \text{ デアリ}$$

且ツ $\underline{\underline{\Omega}}$ ノ各点 $z=x+iy$ ニツイテハ

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

$$\begin{aligned}f(z+\Delta z)-f(z)&=u(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-u(x,y)\\&\qquad+i\{v(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-v(x,y)\}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)|\Delta z|+i\Big\{\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\\&\qquad+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)|\Delta z|\Big\}\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\varepsilon(\Delta z)|\Delta z|\end{aligned}$$

---

2) 領域 Ω 内ノ可測集合 E, $mE>0$ ニツイテ殆ンド到ル処デ $\mathfrak{D}_u(x,y)<+\infty$ ナラバ $u(x,y)$ ハ E ニテ殆ンド到ル処全微分可能デアル。

Stepanoff. Math. Ann. 90.

Rademacher. Math. Ann. 79.

ココニ　$\varepsilon(\Delta z)=\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)+i\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)$

然ルニ　$\lim_{\Delta z\to 0}\varepsilon_i(\Delta x,\Delta y)=0\quad (i=1,2)$ ナル故

$$\lim_{\Delta z\to 0}\varepsilon(\Delta z)=0$$

ヨッテ $f(z)$ ハ $\underline{\underline{\mathfrak{S}}}$ ニテ全微分可能デアル。

故ニ結局 $f(z)$ ハ $\mathfrak{S}$ ニテ殆ンド到ル處全微分可能デアル。

$\mathfrak{S}$ ガ有界デナイ場合ニハ，原点ヲ中心トシ K_i（$K_i \leqq K_{i+1}$, $\lim_{i\to\infty} K_i=\infty$）ヲ半徑トスル開円ヲ $K_i(0)$ トシ

$$\mathfrak{S}\cdot K_i(0)=\mathfrak{S}_i \quad \text{トスレバ} \quad \mathfrak{S}=\sum_{i=1}^{\infty}\mathfrak{S}_i$$

トナル。

一般ニ $\mathfrak{S}_i$ ハ有界開集合デアル。コノ $\mathfrak{S}_i$ ニ前述ノ議論ヲクリカヘセバヨイ。（勿論 $\mathfrak{S}_i$ ハ領域デハナイガ証明ニハ有界開集合ニテ充分デアル）

依ッテ $f(z)$ ハ $\mathfrak{S}_i$ ニテ（$i=1,2,\cdots\cdots$），従ッテ $\mathfrak{S}$ ニテ殆ンド到ル處全微分可能トナル。（証明了）

尚ホコノ証明方法デ解ル通リ，コノ決論ヲ得ルニハ各点 z ニ對シテ

$$\left|f(z)-f(z_0)\right| \leqq M(z_0,R)\,\chi\left(\frac{|z-z_0|}{R}\right)$$

ナル R ガ少クトモ一ツ存在スレバ充分デアル。

更ニ次ノ定理ノ成立スルコトヲ注意シヤウ。

定理 2.

$f(z)$ ガ $\overline{D}_+\chi(0)<+\infty$ ナル $\chi(t)$ ニ関シテ $\mathfrak{S}$ デ可附番点集合ヲ除キ P. de S. ヲ満足スルモノトシ，更ニ

I. Ωデ殆ンド到ル處デ條件K′（叉K‴）[3]ヲ滿足スレバ $f(z)$ハΩデ正則デアル。

II. $f(z)$ガ *directe* ナ函數トシ，Ωデ殆ンド到ル處デ條件K″ヲ滿足スレバ $f(z)$ハΩデ正則デアル。

（證）先ヅ最初ニΩガ有界トシヤウ。

$$d(z, \mathcal{F}(\Omega))^{(4)} > \delta \ (>0)$$

ナルΩニ含マレル。

zノ集合ヲΩ_δトスレバΩ_δハ開集合デアル。

δヲ充分小ニトリサヘスレバ$\Omega_\delta \neq 0$トナル。以上ノ如クδヲ一ツ決メタモノトスル。

シカラバ

$$d(\mathcal{F}(\Omega), \mathcal{F}(\Omega_\delta)) = \delta$$

ナル故

Ω_δノ各點zヲ中心トシテ$\frac{\delta}{2}$ヲ半徑トスル閉円$\frac{\delta}{2}(z)$ヲ畫ケバ$\frac{\delta}{2}(z) \subset \Omega$デアル。

次ニP. de S.ヲ滿足スルΩ_δノ點集合ヲ$\underline{\Omega}_\delta$デ表ハセバ，$m\underline{\Omega}_\delta = m\Omega_\delta$且ツ$\Omega_\delta - \underline{\Omega}_\delta$ハ可附番點集合デアル。

$\underline{\Omega}_\delta$ノ各點$z$デハ

---

3) 條件K′, K″, K‴ニ關シテ本誌102号，463參照.

4) $\mathcal{F}(\Omega)$ハΩノ境界點ノ集合ヲ示シ，$d(z, \mathcal{F}(\Omega))$ハ$z$ト$\mathcal{F}(\Omega)$トノ距離（最短）ヲ示ス。

$$\mathfrak{T}_f(z) \leqq \frac{2M(z, \frac{\delta}{2})}{\delta} \cdot \alpha$$

シカルニ

$$M\left(z, \frac{\delta}{2}\right) \leqq \underset{z \in \overline{\Omega_{\frac{\delta}{2}}}}{Max.} |f(z)| \overset{(5)}{=} M < +\infty$$

ナル故

$$\mathfrak{T}_f(z) \leqq \frac{2M\alpha}{\delta}$$

即チ $\mathfrak{T}_f(z)$ ハ $\underline{\Omega_\delta}$ デ有界デアル. シカルニ $\mathfrak{T}_f(z)$ ハ可測函数ナル故 $\mathfrak{T}_f(z)$ ハ $\underline{\Omega_\delta}$ ニテ 従ッテ Ω_δ ニテ積分可能(L)デアル。

故ニ本誌第102号 463 定理3ニヨリ $f(z)$ ハ Ω_δ デ正則デアル。

$$\lim_{\delta \to 0} \Omega_\delta = \Omega$$

ナル故, 結局 $f(z)$ ハ Ω デ正則トナル。

Ω ガ有界デナイ場合ハ

$$\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(0)\,\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$

トシテ表ハサレル。

$f(z)$ ハ Ω_i . $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ デ正則トナルカラ従ッテ又 Ω ニテモ正則トナル。 (証明了)

---

5) $\overline{\Omega_{\frac{\delta}{2}}}$ ハ $\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ ノ閉被 (*abgeschlossene Hülle*) ヲ示ス。

以上ハ極簡單ナル計算ヨリ導キ出シタ結果デアッテ，單ナル remarque ニスギナイ。事實コレデハ未ダ定理ノ諸條件ナ十分使ヒキッテイルトハ云ヘナイ氣ガスルノデアル。
更ニ精密ナル計算ニヨル。ヨリ以上ノ結果ガ望マシイ。