463. Menchoff ノ定理ニツイテ

井　上　正　雄（阪大）

平面上ノ領域Dデ定義サレタ複素函数 $f(z)$ ヲ考ヘル。

D内ノ一点 z ニツイテ，z ヲ端点トスル $\mathrm{Arg}\, t(z)=\theta$ [1] ナル線分ヲ $t(z)$ トシ，$t(z)$ 上ニ於ケル、次ノ三ツノ極限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},\quad \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right|,$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\mathrm{Arg}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

ガソレゾレ存在スルトキ之レ等ヲ各々

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{t},\ \left|\frac{df}{dz}\right|_{t},\ \mathrm{Arg}\left.\frac{df}{dz}\right|_{t}\ \left(\text{or}\ \left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta},\left|\frac{df}{dz}\right|_{\theta},\mathrm{Arg}\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta}\right)$$

ニテ表ハス。

條件 K′, K″:

$$z\ \text{ニツイテ}\ \mathrm{Arg}\left.\frac{df}{dz}\right|_{t_1}=\mathrm{Arg}\left.\frac{df}{dz}\right|_{t_2}=\mathrm{Arg}\left.\frac{df}{dz}\right|_{t_3}$$

$$\text{or}\ \left|\frac{df}{dz}\right|_{t_1}=\left|\frac{df}{dz}\right|_{t_2}=\left|\frac{df}{dz}\right|_{t_3}<+\infty$$

---

(1)　一般ニ $\mathrm{Arg}\pm t(z)$ ハ實軸ヨリ±ノ方向ニ測ッタ $t(z)$ ノナス角ヲ示ス。

ヲ満足スル z ヲ端点トスル，イヅレノ二ツモ一直線上ニ在ラザル三線分 $t_1(z)$, $t_2(z)$, $t_3(z)$ ガ存在スルトキ，$f(z)$ ハ z ニヲイテ條件 K' 及 K'' ヲ満足スルト云フ。

條件 K''':

$$z \text{ ニヲイテ } \left.\frac{df}{dz}\right|_{t_1} = \left.\frac{df}{dz}\right|_{t_2} \text{ (有限) ヲ満足スル } z \text{ ヲ}$$

端点トスル。

一直線上ニ在ラザル二線分 $t_1(z)$, $t_2(z)$ ガ存在スルトキ $f(z)$ ハ z ニヲイテ條件 K'' ヲ満足スルト云フ。

シカルトキ次ノ定理ガ成立スル。

定理. $f(z)$ ガ z デ全微分可能トシ且ツ

I. K' ヲ満足スレバ $f(z)$ ハ z デ正則[(2)] (*monogène*) デアル。

II. K'' ヲ満足スレバ $f(z)$ ハ z ガ正則カ又ハ正則函数ノ共軛函数デアル。

III. K''' ヲ満足スレバ $f(z)$ ハ z デ正則デアル。

Menchoff 自身ノ証明モアルガ[(3)]，次ノ様ニシテ簡明ニ証明スルコトモ出来ル。

一般ニ $f(z)=u+iv$ ガ z デ全微分可能トスレバ，z ニヲイテ $\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta}$ ガ存在シ且ツ

---

(2) I, II, III, スベテ *pointwise regular* ナルコトデアル。

(3) *Menchoff: Les conditions de monogénéité (Actuarités 1936) p. 19—23.*

$$\gamma(z,\theta)=\left.\frac{df}{dz}\right|_{t}=\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta}=\mathcal{D}_1[f(z)]+\mathcal{D}_2[f(z)]\,e^{-2i\theta}$$

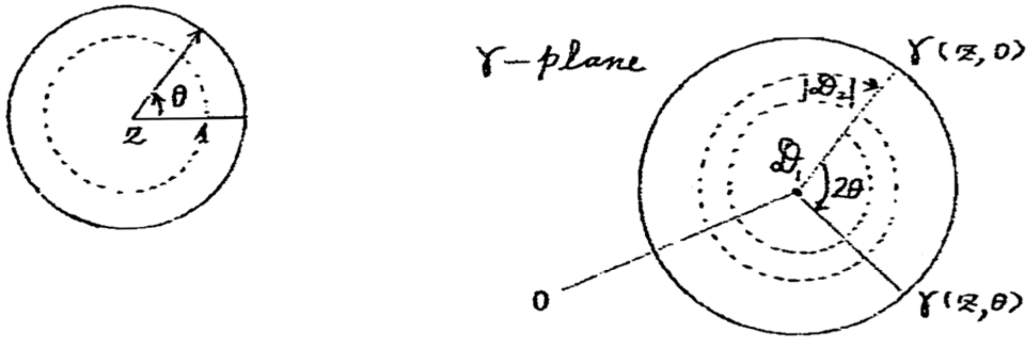
トナル。

但シ
$$\begin{cases}\mathcal{D}_1[f(z)]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\\[2ex]\mathcal{D}_2[f(z)]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\end{cases}$$

即チ
$$\gamma(z,\theta)-\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2\,e^{-2i\theta}$$
$$|\gamma(z,\theta)-\mathcal{D}_1|=|\mathcal{D}_2|$$

コノ式ハz平面ニテθガzヲ正ノ方向ニ一回轉スレバγ平面ニテ$\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta}$ハ$\mathcal{D}_1$ヲ中心トシテ$|\mathcal{D}_2|$ヲ半徑トスル円周（此ノ円ヲ Kasner ノ circle ト云フ）ヲ負ノ方向ニ2倍ノ速度ヲ以テ二回轉スルコトヲ示ス。（Fig. 1）

Fig. 1



I ノ証明

$\mathrm{Arg}^{+}\,t_i(z)=\theta_i$ トシ $0\leq\theta_1<\theta_2<\theta_3<2\pi$ トス。

假定ニヨリ

$$\mathrm{Arg}\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_1}=\mathrm{Arg}\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_2}=\mathrm{Arg}\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_3}=0$$

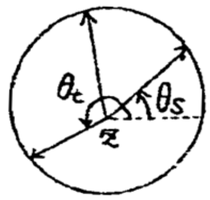
若シ$|\mathcal{D}_2|\neq 0$トスレバ，zニ對シテハ$\left.\frac{df}{dz}\right|_{\Theta}$ハ$\gamma$平面ニテ

一ツノ Kasner ノ circle ヲ画クカラ $\left.\frac{df}{dz}\right|_{\Theta}$ ノウチ Arg ガ θ トナルヤウナモノハ高々二ツシカ存在シナイ。(Fig. 2)

故ニ θ_i $(i=1,2,3)$ ノウチ

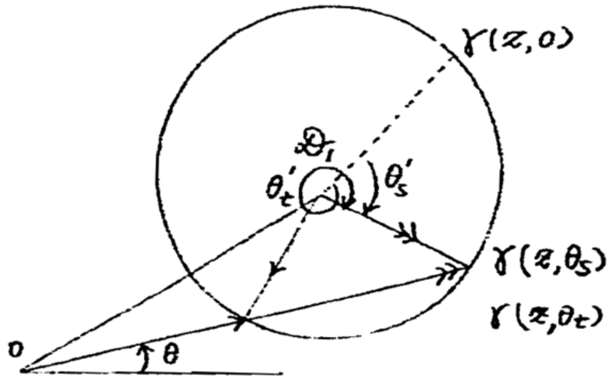
$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_s} = \left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_t}$$

Fig. 2



トナル、少クトモ一組ノ (θ_s, θ_t) ガ存在スル $(s \neq t)$。

γ-plane



今

$$\operatorname{Arg}^{-}\left(\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_i} - \mathcal{D}_1\right) = \theta_i'$$ [1]

トスレバ（但シ $\theta_1 \to \theta_2 \to \theta_3$ ノ回轉ニ應ジテ測ル）

$\theta_i \longleftrightarrow \theta_i'$ ガ連續的ニ對應シ且ツ Kasner ノ circle ノ性質ニヨリ

$$|\theta_i - \theta_j| = \frac{1}{2}|\theta_i' - \theta_j'| \quad (i,j=1,2,3)$$

シカラバ上ノ θ_s, θ_t ニ對シテハ

$$|\theta_s' - \theta_t'| = 2\pi \quad 即チ \quad |\theta_s - \theta_t| = \pi$$

デナケレバナラヌ。

シカルニ $t_i(z)$ ハイヅレノ二ツモ一直線上ニナイカラ

$|\theta_i - \theta_j| \neq \pi$ $(i,j=1,2,3)$ 故ニ勿論 $|\theta_s - \theta_t| \neq \pi$

之レハ矛盾デアル。 $\therefore\ \mathcal{D}_2 = 0$[4]

即 $$\left.\frac{df}{dz}\right|_{\Theta} = \mathcal{D}_1[f(z)]$$

---

(4) $\mathcal{D}_2 = 0$ ハコノ点デ Cauchy-Riemann ノ関係式ガ成立スルコトヲ示ス。

右辺ハ Ⓗ ニ無関係且ツ有限デアル。

故ニ $f(z)$ ハ z デ正則デアル。

Ⅱ ノ証明

(i) $|\Theta_1| = 0$

コノトキハ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ ガ成立スルカラ

$f(z)$ ハ z デ正則函数ノ共軛函数デアル。

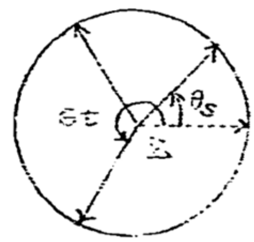
(ii) $|\Theta_1| \neq 0$

仮定ヨリ $\left|\dfrac{df}{dz}\right|_{\theta_1} = \left|\dfrac{df}{dz}\right|_{\theta_2} = \left|\dfrac{df}{dz}\right|_{\theta_3} = l < +\infty$

今若シ $|\Theta_2| \neq 0$ トスレバ $\left.\dfrac{df}{dz}\right|_{\theta}$ ハ矢張リ γ 平面デ Kasner ノ circle ヲ画クカラ $\left|\dfrac{df}{dz}\right|_{\theta}$ ガ l トナルヤウナ $\left.\dfrac{df}{dz}\right|_{\theta}$ ハ高々二ツシカナイ。(Fig.3)

故ニ

Fig. 3



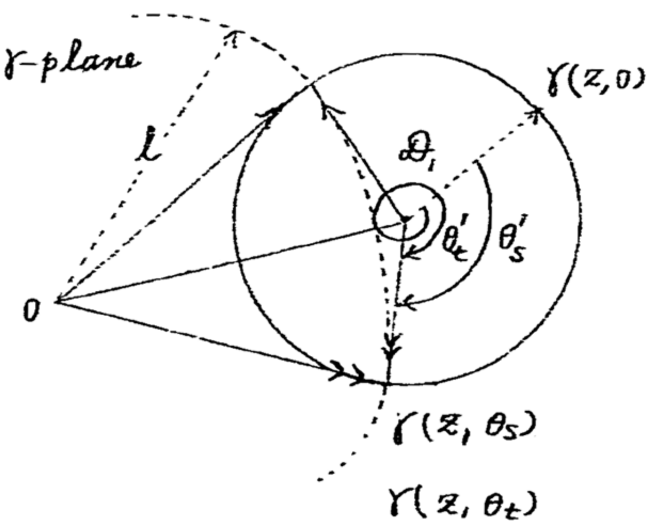
$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_s} = \left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_t}$$

ナル少クトモ一組ノ (θ_s, θ_t) ガ存在スル。

後ハ全ク Ⅰ ト同様ニシテ矢張リ矛盾トナル。

$\therefore\ \Theta_2 = 0$

即チ $f(z)$ ハ z デ正則デアル。

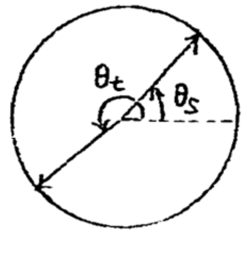


III.

矢張リ $|\mathscr{D}_2| \neq 0$ ト假定シヤウ。

假定ヨリ

Fig. 4



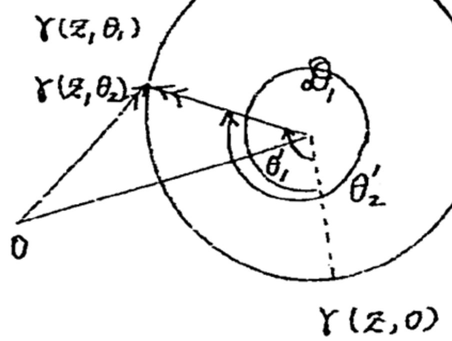
$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_1} = \left.\frac{df}{dz}\right|_{\theta_2}$$

デアルカラ

$$|\theta_1' - \theta_2'| = 2\pi$$

γ-plant

即チ $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$ デナケレバナラヌ。(Fig. 4)



シカルニ $t_1(z), t_2(z)$ ハ一直線上ニナイカラ

$$|\theta_1 - \theta_2| \neq \pi$$

故ニ矛盾. $\therefore\ \mathscr{D}_2 = 0$

即チ $f(z)$ ハ z デ正則デアル.

コノ定理ハ何ニモ難シイト云フワケデハナイガ，唯コノ証明方法ニヨル方ガコレ等諸條件ノ意味、換言スレバ各條件ノ所謂效キ方ガ判然トスルヤウニ思ハレル。

Menchoff ハ此ノ定理ヲ根幹トシテ次ノ定理ヲ証明シタ。[5]

定理 1.

$f(z)$ ヲ D デ定義サレタ単葉ナ連続函数トスル。

---

(5) Menchoff, Sur les fonctions monogènes. Bull. de la Soc. Math. de F. t. 59 (1931)
Menchoff, Actuarités. loc. cit.

若シ $f(z)$ ガDデ可附番点集合ヲ除キ，各点デ K' 或ハ K'' ヲ満足スルナラバ $f(z)$ ハDデ正則デアル。

定理 2.

$f(z)$ ヲDデ定義サレタ單葉且ツ *directe*[6] ナ連続函數トス。

若シ $f(z)$ ガDデ可附番点集合ヲ除キ，各点デ K'' ヲ満足スルナラバ $f(z)$ ハDデ正則デアル。

以上ノ二定理ニヨイテ條件 K', K'' ノ三ツノ線分ヲ二ツノ線分デ置キ換ヘレバ最早定理ガ成立シナクナルコトハ正則ナラザル單葉ナ全微分可能函數ヲ考ヘ得ルコトヨリ明ラカデアル。例ヘバ $f(z)=x+y+iy$。

併シ一方，此ノ二定理ニ依リ，*Laurentieff* ノ *fonction presque analytique* ノ定義ニヲケル condition métrique ヲ上述ノ條件 K', K'', K''' デ各々置換スレバ $f(z)$ ハDデ正則函數トナルコトガ解ル。即チ次ノ定理ガ成立スル。

定理

$f(z)$ ヲDデ定義サレタ連続函数トシ，可附番点集合ヲ除キ，各点 z デ *localement univalente* ナ函數トスル。

シカルトキ若シ $f(z)$ ガ可附番点集合ヲ除キ，Dノ各デ K',

---

z 平面上ノ *Jordan* 曲線Jノ $f(z)$ ニヨル *Bild* ヲJ′トシタトキ，コノ二曲線ノ *sense* ガ常ニ同ジデアルトキ $f(z)$ ハ *directe* ナリト云フ。

K''（コノトキノミ $f(z)$ ハ directe トス），或ハ K''' ヲ満足スルナラバ $f(z)$ ハ D デ正則デアル。

証明ハ簡単デアル。

共通除外点集合ヲ e トスレバ，$D-e$ ノ各点ノ充分小サイ近傍デ定理1,2ヲ應用スレバ，$f(z)$ ガ $D-e$ ノ各点デ正則ナルコトガワカル。

シカルニ e ハ可附番点集合デアルカラ，結局 $f(z)$ ハ D デ正則トナル。(7)

尚 Menchoff ハ $f(z)$ ノ単葉性ヲ除去シテ次ノ定理ヲ証明シタ。

定理3.

連続函数 $f(z)$ ガ D ノ殆ンド到ル処デ K' ヲ満足シ，

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| = L(z)$$ ガ可附番点集合ヲ除キ，

D ノ各点デ有限且ツ D デ積分可能ナラバ $f(z)$ ハ D デ正則デアル。

然シ此ノ定理ガ條件 K' ヲ K''（$f(z)$ ハ directe トス），或ハ K''' デ置換シテモ矢張リ成立スルコトガ同様ニシテ証明サレル。

---

(7) $f(z)$ ガ D デ可附番点集合ヲ除キ正則ナラバ D デ正則トナルコトハ Pompeiu ガ既ニ Ann. de la Fac. Sci. de Toulouse (2), 7, (1905) デ証明シタ。