439. 函數不等式 $f(x,y)\leqq g(x)+h(y)$ ニ就イテ

角 谷 静 夫（阪大）

$f(x,y)$ ガ空間 $R_1\times R_2$ ニテ define サレタ real, non-negative one-valued function ナルトキ、夫々 R_1 及ビ R_2 ニテ define サレタ real non-negative one-valued functions $g(x)$ 及ビ $h(y)$ ヲ適當ニエランデ

$$f(x,y)\leqq g(x)+h(y)$$

ガ成立スルヨウニ出來ルカドウカ、ト云フ問題ヲ考ヘル。コレハ quasi-metric space ガ他ノ metric space ニ "einbetten" デキルカドウカト云フ問題ニ関シテ起ッタ。

先ヅ $R_1=R_2$ ナルトキハ $f(x,y)$ ガ symmetric デアリ、$g=h$ デアルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。何者、モシサウデナケレバ

$$f_1(x,y)=f(x,y)+f(y,x)$$

$$g_1(x)=g(x)+h(x)$$

ト置ケバヨイ。

$R_1(=R_2)$ ガ可附番個ノ点ヨリ成ッテヰル時ハ majoration ハ明カニ可能デアル。

$$R_1=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots)$$

デアレバ

$$g(x_n)=\max\left(f(x_1,x_n),\ f(x_2,x_n),\cdots\cdots,f(x_n,x_n)\right)$$

トオケバヨイ。スルト $m\leqq n$ ナラバ

$$f(x_m,x_n)=f(x_n,x_m)\leqq g(x_n)\leqq g(x_m)+g(x_n)$$

デアル。

シカシ、majoration ハ一般ニハ必ズシモ可能デナイ。

次ニ R_1 = set of all real numbers ニテ majoration ガ不可能ナ例ヲ掲ゲル。

$$f(x,y)=\frac{1}{|x-y|}\qquad x\neq y$$

$$=0\qquad x=y$$

トオケバ $f(x,y)$ ハ全平面上ニテ定義サレタ symmetric ナ函数デアル。

コノ $f(x,y)$ ガ immajorable ナコトヲ示サウ。

今若シ

$$f(x,y)\leqq g(x)+h(y)\tag{A}$$

トナル如キ real, non-negative, one-valued functions $g(x)$, $h(y)$ ガアッタトセヨ。

$g(x)=h(x)$ ト考ヘテ差支ヘナイ。何者、モシサウデナケレバ

$$g_1(x)=g(x)+h(x)$$

トオケバヨイカラ。故ニ

$$f(x,y)\leqq g(x)+g(y)\tag{1}$$

ガ成立スルト假定シテ矛盾ガオコルコトヲ示セバヨイ。

今

$$E_n = \underset{(x,y)}{E}\left[f(x,y) < n\right]$$

$$E_n^* = \underset{(x)}{E}\left[g(x) < n\right]$$

トスレバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n^* = R_1 \tag{2}$$

ニテ (1) ガ成立スルコトヨリ

$$E_n^* \times E_n^* \subseteqq E_{2n} \tag{3}$$

デアル。但シ、$E_1 \times E_2$ ハ $x \in E_1$, $y \in E_2$ ナル *pair* (x, y) ノ表ハス点ノ集合トス。

トコロガ一方、$f(x, y)$ ノ定義ヨリ

$0 < |x - x_0| < \frac{1}{2n}$ ナルトキハ $f(x, x_0) > 2n$ デアルカラ

$$(x, x_0) \,\overline{\in}\, E_{2n}$$

故ニ (3) ヨリ、若シ $x_0 \in E_n^*$ ナラバ $0 < |x - x_0| < \frac{1}{2n}$ ナル x ニ對シテハ $x \,\overline{\in}\, E_n^*$ デアル。

即チ、E_n^* ハ x_0 ヲ含メバ x_0 ノ $\frac{1}{2n}$ — 近傍ノ点ハ x_0 以外ニ一ツモ含マナイ。依ッテ E_n^* ハ孤立点集合デアル。コレハ (2) ニ矛盾スル。何者、E_n^* ハ孤立点ノミヨリナッテヰルカラ可附番集合デ、ソノ可附番個ノ和モ可附番集合デナケレバナラナイカラ。

一般ノ $R_1 \times R_2$ デ *define* サレタ *function* $f(x, y)$ ノ *majoration* ノ問題ニ對シテハ次ノ定理ガ成立スル。

定理: $R_1 \times R_2$ ニテ *define* サレタ *real non-negative* *one-valued function* $f(x, y)$ ガ上記ノ如ク *majorable* デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ

$$\overline{E}_n = \underset{(x,y)}{E}\left[f(x,y) \geqq n\right], \quad n=1, 2, \cdots\cdots \tag{4}$$

トオイタトキ、$\overline{E}_n$ ガ二ツノ（必ズシモ *disjoint* デナクテヨイ）集合 E_n^1 ト E_n^2 トノ和ニワカレ

$$\overline{E} = E_n^1 + E_n^2 \tag{5}$$

コノ各々ガ

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{proj}_x (E_n^1) = 0 \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{proj}_y (E_n^2) = 0 \tag{7}$$

ヲ満足スルコトデアル。

證明：

1° 必要ナルコト。（A）ガ成立スルトセヨ。

$$X_n = \underset{x}{E}\left[g(x) \geqq \frac{n}{2}\right]$$

$$Y_n = \underset{y}{E}\left[h(y) \geqq \frac{n}{2}\right]$$

トオケバ明カニ

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} Y_n = 0$$

デアル。又、（A）ガ成立スルカラ

$$\overline{E}_n \subset X_n \times R_2 + R_1 \times Y_n$$

ガアル。何者：$(x, y) \in \overline{E}_n$ ナラバ $f(x, y) \geqq n$ デアルカラ、（A）ヨリ $g(x) \geqq \frac{n}{2}$ カ又ハ $h(y) \geqq \frac{n}{2}$ ガ成立シナケレ

バナラナイ。

即チ、前者ノ時ハ $x \in X_n$ ヨリ $(x, y) \in X_n \times R_2$, 後者ノトキハ $y \in Y_n$ ヨリ $(x, y) \in R_1 \times Y_n$。

故ニ

$$E_n^1 = \overline{E}_n \cdot (X_n \times R_2)$$
$$E_n^2 = \overline{E}_n \cdot (R_1 \times Y_n)$$

トオケバ

$$\overline{E}_n = E_n^1 + E_n^2$$

ニテ

$$proj_x (E_n^1) \subseteq X_n$$
$$proj_y (E_n^2) \subseteq Y_n$$

故ニ

$$\lim_{n\to\infty} Proj_x (E_n^1) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} Proj_y (E_n^2) = 0$$

2°. <u>十分ナルコト</u>。 (5), (6), (7) ガ成立スルトセヨ。

各々ノ $x \in R_1$, $y \in R_2$ ニ對シテ

$$x \in Proj_x (E^1_{n(x)-1}); \quad x \overline{\in} Proj_x (E_n^1)$$
$$\text{for} \quad n \geqq n(x)$$

$$y \in Proj_y (E^2_{n(y)-1}); \quad y \overline{\in} Proj_y (E_2^n)$$
$$\text{for} \quad n \geqq n(y)$$

ナル $n(x), n(y)$ ガ對應スル。($E_0^1 = E_0^2 = R_1 \times R_2$ ト考ヘル)

今、$g(x) = n(x)$, $h(y) = n(y)$

トオケバ (A) ガ成立スル。何者、

$$n-1 \leqq f(x, y) < n$$

ナラバ

$$(x, y) \in \overline{E}_{n-1} = E'_{n-1} + E^2_{n-2}$$

トナリ、コレヨリ

$$x \in \mathrm{Proj}_x (E'_{n-1}) \quad \text{or} \quad y \in \mathrm{Proj}_y (E^2_{n-1})$$

随ッテ

$$g(x) \geqq n \quad \text{or} \quad h(y) \geqq n$$

之レヨリ、明カニ

$$f(x, y) < g(x) + h(y)$$