436. 非同次型線狀移動可能函數方程式ニ就イテ (II)

北 川 敏 男 (阪大)

3. 函數方程式 (1) ニ於イテ、次ノ條件ガ充サレテヰル

場合ガ(II)ノ對象ヲナス。

假定I. $g(x)$ ハ任意ノ有限區間デ $L-$integrable デアリ、且ツ Bochner ノ所謂 gesamt stufe $G(-\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$ ニ屬スル。

即チ

$$(14.1)\quad \overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\log|g(x)|}{x}=\beta^{(1)}$$

$$(14.2)\quad \overline{\lim_{x\to-\infty}}\frac{\log|g(x)|}{-x}=-\alpha^{(1)}$$

($\alpha^{(1)}\leqq 0\leqq\beta^{(1)}$ トスル)

假定II. Linear translable operation ノ母函數 $G(\lambda)$ ニ関スル條件トシテ

$$\alpha\leqq R(\lambda)\leqq\beta$$

ナル $\lambda-$plane 上ノ strip ニハ、零点ヲ有シナイ Polynome $P(\lambda)$ ガアッテ、コレニ関シテ

$$(15.1)\quad \int_0^\infty\left|\frac{(\beta+i\nu)^n}{P(\beta+i\nu)\,G(\beta+i\nu)}\right|^i d\nu<\infty\quad (i=1,2)$$

$$(15.2)\quad \int_{-\infty}^0\left|\frac{(\alpha+i\nu)^n}{P(\alpha+i\nu)\,G(\alpha+i\nu)}\right|^i d\nu<\infty\quad (i=1,2)$$

トナルコトニスル。コヽニ

$$(16)\quad \alpha<\alpha_1\leqq 0\leqq\beta_1<\beta$$

デアルトスル。

$\lambda-$plane 上ノ四点 $\beta-iA$, $\beta+iA$, $-\alpha+iA$ 並ビニ $-\alpha-iA$ ヲバ, counter-clockwise ニ通過スル Contour

ヲ考ヘル —— 以下デハ、α, β ヲ *fixed* ニシ A ヲ適當ニカヘルノデ ——コレヲ $\mathbb{C}_A$ デ表ハス。尚、上記四点間ノ $\mathbb{C}_A$ ノ部分ヲ夫々 $\mathbb{C}_A^{(i)}$ $(i=1,2,3,4)$ デ表ハス。$\mathbb{C}_A^{(1)}$, $\mathbb{C}_A^{(3)}$ ハ虚軸ニ平行ナ *segments* ニナツテ井ルトスル。

並ニ次ノ函數ヲ導入スル:

$$(17)\quad \mathbb{K}_\gamma(x-t,A)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\gamma+i\nu)(x-t)}}{P(\gamma+i\nu)Q(\gamma+i\nu)}d\nu$$

$$(18)\quad \underline{\mathrm{H}}_{\alpha}^{\beta}(x-t,A)\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{C}_A}\frac{e^{\lambda(x-t)}}{P(\lambda)Q(\lambda)}d\lambda$$

更ニ，擴張サレタ *Schmidt* ノ函數ヲ次ノ如ク定義スル;

$$(19)\quad \widetilde{\mathrm{N}_A}(x,f:P)\equiv\int_0^\infty g(t)K_\beta(x-t,A)\,dt$$
$$+\int_{-\infty}^0 g(t)\mathbb{K}_\alpha(x-t,A)\,dt$$

コヽニ、コレ等ノ積分ノ存在ハ，假定 I 並ビニ

$$(20.1)\quad |K_\beta(x-t,A)|\leqq Me^{\beta(x-t)}$$

$$(20.2)\quad |K_\alpha(x-t,A)|\leqq Ne^{-\alpha(x-t)}$$

ナル *estimation* ニヨリ明カデアル。但シ，M, N ハ A ノ $x-t$ ニ無關係ナ常數デアル。

茲デ注意スベキコトハ，$\widetilde{\mathrm{N}_A}(x,f:P)$ ハ前回ニ論ジタ $N_r(x,x_0;f:P)$ ノ *degenerate form* デアルトイフコトデアル。ソノ意味ハ，

$$(21)\quad \begin{cases} 1^\circ & P_r(\lambda)\equiv P(\lambda) \qquad (r=0,1,2,3,\cdots\cdots) \\ 2^\circ & \mathbb{C}_r\equiv\mathbb{C}_A \\ 3^\circ & x_0=0,\ a=-\infty,\ \text{且ツ}\ b=\infty \end{cases}$$

$\left\{\right.$ 4° λニ関スル積分ニ於イテ、$\mathbb{C}_A^{(1)}$, $\mathbb{C}_A^{(3)}$ = correspond シタモノノミヲ考慮ニ入レ、$\mathbb{C}_A^{(2)}$, $\mathbb{C}_A^{(4)}$ = correspond スルモノハ omit スル。

ナルヤウニトルトキ，$N_\gamma(x, x_0; f: P_\gamma)$ ハ即チ $\widetilde{N}_A(x, f: P)$ トナルカラデアル。並ニ $a=-\infty$, $b=\infty$ ト，トルコトノ效果ノ一ツハ大ザッパニ言ヘバ，§2. 第二種 (8.1) 並ビニ (8.2) ノ積分ヲ考慮スル要ナキヤウニスルトコロニモアル。又 (20). 3° ニ於ケル積分路ノ Omit ヲ許シウルタメニハ次ニ述ベル如ク吾々ハ若干ノ假定ト補助定理ヲ要スル。

4. 補助定理 I. 前節ノ假定ノモトニ於イテハ

$$(21)\quad \Gamma_s\left\{\int_0^\infty g(t)\mathrm{K}_\beta(x+s-t, A)\,dt+\int_{-\infty}^0 g(t)\mathrm{K}_\alpha(x+s-t, A)\,dt\right\}^{(2)}$$

ガ存在シ

$$(22)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(t)\left\{\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)}\,d\nu\right\}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 g(t)\left\{\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\alpha+i\nu)(x-t)}}{P(\alpha+i\nu)}\,d\nu\right\}dt$$

ニ等シイ。

証明： 今暫ク次ノ如ク置ク：

---

(2) 一般ニ $\underset{0}{\Gamma_\xi}\{h(x+\xi, y_1, y_2, \text{-------})\}$ ノ代リニ，$\underset{x}{\Gamma}(h(x, y_1, y_2, \text{----}))$ ナル省略記法ヲ用ヰルコトガアル，コヽニ

$$\underset{0}{\Gamma_\xi}\{h(x+\xi, y_1, y_2, \text{-----})\}\equiv\sum_{k=0}^{n}\underset{0}{\Lambda_\xi^k}\{h^{(k)}(x+\xi, y_1, y_2, \text{-----})\}$$

デアルコト言フマデモナイ。

(23) $$\psi_A(x)=\int_0^\infty g(t)\,K_\beta(x-t,A)\,dt$$

(24) $$\phi(x,t;A)=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\beta+i\nu)x}e^{-i\nu t}}{G(\beta+i\nu)P(\beta+i\nu)}\,d\nu.$$

然ルトキ容易ニ示シ得ル如ク、x ニ関シテ $\psi_A(x)$ 並ビニ $\phi(x,t;A)$ ハ少クモ n 回ハ，微分可能デ、上式ヲ形式的ニ微分シタモノデ $\psi_A^{(k)}(x)$, $\phi_x^{(k)}(x,t;A)$ ハ與ヘラレル。（共ニ x ニ関スル微分係数）（$0\leqq k\leqq n$）、即チ

(25) $$\psi_A^{(k)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(t)\left\{\int_{-A}^{A}\frac{(\beta+i\nu)^k e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)}\,d\nu\right\}dt$$

(26) $$\phi_x^{(k)}(x,t,A)=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{(\beta+i\nu)^k e^{(\beta+i\nu)x-i\nu t}}{G(\beta+i\nu)P(\beta+i\nu)}\,d\nu$$

更ニ

(27) $$|\psi_A^{(k)}(x)|,\ |\phi_x^{(k)}(x,t;A)|<Ke^{\beta x}\ (\text{for } x\geqq 0)$$

サテ、Γ ノ *linear translatability* ニ依ッテ有限區間ノ積分ト Operation Γ ノ順序ヲ交換シテヨイカラ

(28) $$\Gamma_x\left(\phi(x,t;A)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\beta+i\nu)x}e^{-i\nu t}}{P(\beta+i\nu)}\,d\nu$$

$$=\frac{e^{\beta x}}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-i\nu t}}{P(\beta+i\nu)}\,d\nu$$

依ッテ積分

(29) $$\int_0^\infty g(t)e^{-\beta t}\Gamma_x\left(\phi(x,t;A)\right)dt$$

ハ存在シテ、ソレハ

$$(30)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(t)\left\{\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)}d\nu\right\}dt$$

ニ等シイ。任意ノ有限區間（$0, m$）デ

$$(31)\quad \int_0^m g(t)e^{-\beta t}\underset{x}{\Gamma}\Big(\phi_\beta(x,t;A)\Big)dt=\underset{x}{\Gamma}\Big(\int_0^m g(t)e^{-\beta t}\phi_\beta(x,t;A)dt\Big)$$

トイフコトト，

$$\underset{x}{\Gamma}\Big(\int_0^\infty g(t)e^{-\beta t}\phi_\beta(x,t,A)dt\Big)$$

ノ存在トカラ、$m\to\infty$ トシテ

$$(32)\quad \underset{x}{\Gamma}\Big(\psi_A(x)\Big)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(t)\left\{\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)}d\nu\right\}dt$$

全ク同様ニシテ

$$(33)\quad \underset{x}{\Gamma}\Big(\int_{-\infty}^{0} g(t)\mathbb{K}_\alpha(x-t,A)dt\Big)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} g(t)\left\{\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\alpha+i\nu)(x-t)}}{P(\alpha+i\nu)}d\nu\right\}dt$$

ヲ得ルカラ、証明ハ完結スル。

定理I. 假定 I, II ノモトニ於イテ

$$(34)\quad P(D_x)\underset{x}{\Gamma}\left\{\underset{A\to\infty}{l.i.m.}\int_0^\infty g(t)K_\beta(x-t,A)dt\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{0} g(t)\mathbb{K}_\alpha(x-t,A)dt\right\}=g(x)$$

注意.

$$(35)\quad P(X)\equiv\sum_{s=0}^{n}a_s X^s \text{ ナルトキ}$$

$$(36)\quad P(D_x)g(x)=\sum_{s=0}^{n}a_s\frac{d^s}{dx^s}g(x)$$

ニ解スルコトニスル。

証明：　コレニハ、Paley-Wiener: Fourier Transforms Chapter VI. p. 88 (27.15)—(27.17) ニ於ケル論法ヲ用キレバヨイ。

長クナルカラ委細ハ同書ニ譲ル。

補助定理III.　$f(x)$ モ亦假定I, II ヲ充タシタトスル、然ルトキ

$$(37)\quad \psi_A(x)=\int_0^\infty K_\beta(x-t,A)\Gamma f(t)\,dt+\int_{-\infty}^0 K_\alpha(x-t,A)\Gamma f(t)\,dt$$

トオクナラバ，$\psi_A(x)$ ハ少クモ $n+k$ 回ハ連続微分可能デアル。而シテ

$$(38)\quad \psi_A(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(t)\left\{\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)}d\nu\right\}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 f(t)\left\{\int_{-A}^{A}\frac{e^{(\alpha+i\nu)(x-t)}}{P(\alpha+i\nu)}d\nu\right\}dt$$

$$-\sum_{p=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{p-1}\mathop{\Lambda}_0{}^{\nu}_{h}\left\{f^{(p-\nu-1)}(h)\right\}\left[K_\beta^{(\nu)}(x-t,A)-K_\alpha^{(\nu)}(x-t,A)\right]$$

$$+\sum_{p=0}^{n}\mathop{\Lambda}_0{}^{p}_{h}\left\{\int_0^h f(t)\left(K_\beta^{(p)}(x-t,A)-K_\alpha^{(p)}(x-t,A)\right)dt\right\}$$

証明：　コレヲ証明スルニハ，(I) ニ述ベタ積分ノ変形ト同ジ計算デ

$$(39)\quad \int_0^\infty g^{(p)}(t+h)K_\beta(x-t,A)\,dt+\int_{-\infty}^0 g^{(p)}(t+h)K_\alpha(x-t,A)\,dt$$

$$=\int_0^\infty g(t)\frac{\partial^p K_\beta(x+h-t,A)}{\partial x^p}dt+\int_{-\infty}^0 g(t)\frac{\partial^p K_\alpha(x+h-t,A)}{\partial x^p}dt$$

$$-\sum_{\nu=0}^{p-1} g^{(p-\nu-1)}(h)\left\{K_{\beta}^{(\nu)}(x-t, A)-K_{\alpha}^{(\nu)}(x-t, A)\right\}$$

$$+\int_0^h g(t)\left\{K_{\beta}^{(p)}(x-t, A)-K_{\alpha}^{(p)}(x-t, A)\right\} dt$$

ヲ導イテオケバヨイ。

吾々ハ更ニ，次ノ假定ヲ設ケテ論歩ヲ進メル：

假定III. 次ノ如キ正数ノ系列 $\{A_m\}$ が存在スル.

(40)

1°. $A_m \uparrow \infty$

2°. $\displaystyle\int_{R(\alpha)}^{R(\beta)}\left|\frac{(\mu \pm i A_m)^k e^{(\mu \pm i A_m)(x-t)}}{P(\mu \pm i A_m) Q(\mu \pm i A_m)}\right||d\mu| \to 0$

(as $m \to \infty$)　茲ニ，$k \leqq n$ トスル。

3°. $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{\partial^{\nu} H_{\alpha}^{\beta}(x-t, A_m)}{\partial x^{\nu}}$　$(\nu=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$

が存在スル。

假定IV. Strip $-\alpha \leqq R(\lambda) < -\alpha_1$ 及ビ，$\beta_1 < R(\lambda) \leqq \beta$ ニハ $G(\lambda)$ ノ零点ハ存在シナイ。

補助定理III. 假定III ノモトニ、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial^{\nu} H_{\alpha}^{\beta}(x-t, A_m)}{\partial x^{\nu}}=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu} K_{\beta}(x-t, A_m)}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^{\nu} K_{\alpha}(x-t, A_m)}{\partial x^{\nu}}\right\} \tag{41}$$

但シ $\nu=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$.

以上ノ準備ノ結果トシテ次ノ基本定理ニ到達スル；

定理II. 假定I, II, III ノモトニ於イテ、gesamt stufe $G(-\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$ ニ属スル函数方程式 (1) ノ任意ノ解ハ次ノ如ク表ハサレル。

$$(42)\quad f(x)=P(D_x)\left\{\underset{m\to\infty}{l.i.m.}\int_0^{\infty} g(t)\,K_\beta(x-t,A_m)\,dt\right\}$$

$$+P(D_x)\left\{\underset{m\to\infty}{l.i.m}\int_{-\infty}^{0} g(t)\,K_\alpha(x-t,A_m)\,dt\right\}$$

$$+\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{\rho-1}\Lambda_{0\,k}^{\nu}\left\{f^{(\rho-\nu-1)}(k)\right\}P(D_x)\left\{\underset{m\to\infty}{l.i.m.}\frac{\partial^\nu H_\alpha^\beta(x-t,A_m)}{\partial x^\nu}\right\}$$

$$-\sum_{\rho=0}^{n}\Lambda_{0\,k}^{\rho}\left\{\int_0^{k} f(t)\,P(D_x)\left\{\underset{m\to\infty}{l.i.m.}\frac{\partial^\nu H_\alpha^\beta(x-t,A_m)}{\partial x^\nu}\right\}dt\right\}.$$

定理III. 條件 I, II, III, IV ノモトニ於イテ

$$(43)\quad F(x)=P(D_x)\left\{\underset{m\to 0}{l.i.m.}\int_0^{\infty} g(t)\,\overline{K}_\beta(x-t,A_m)\,dt\right\}$$

$$+P(D_x)\left\{\underset{m\to\infty}{l.i.m.}\int_{-\infty}^{c} g(t)\,K_\alpha(x-t,A_m)\,dt\right\}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\left\{\underset{m\to\infty}{l.i.m.}\frac{\partial^\nu H_\alpha^\beta(x-t,A_m)}{\partial x^\nu}\right\}$$

ニヨツテ定義サレタ任意ノ函数 $F(x)$ ハ、函数方程式 (1) ノ解デアリ、且ツ *gesamt stufe* $G(-\alpha_1,\beta_1)$ デアル。