434. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, X

福原満洲雄（北大）

特異点 (I, iii) λハ0デモ正ノ整数デモナク、考ヘテキル範囲ニ $\mu-\nu\tan\theta>0$ デアルヤウナ θ ハ存在シナイガ $\mu-\nu\tan\theta=0$ トナルヤウナ θ ハ存在スル場合デアル、故ニ假定 $1°, 2°, 3°$ ヲ取ルナラバ $\mu-\nu\tan\theta_0=0$ ノ場合, 假定 $4°, 5°$ ヲ取ルナラバ $\mu-\nu\tan\theta_1=0$, $\mu-\nu\tan\theta_2<0$ 又ハ $\mu-\nu\tan\theta_1<0$, $\mu-\nu\tan\theta_2=0$ トナル場合デアル、假定 $6°$ ハ考ヘル必要ガナイ. 尚ココデハ假定 $1°, 2°, 4°$ ノ場合モ除ク、何レノ場合ニシテモ $y=x^{\rho}z$ $(\rho>0)$ ト置クコトニヨリ特異点 (I, iv) ノ場合ノ結果ヲ利用スルコトガ出來ル。此ノヤウニシテ得ラレル結果ヨリ $3°, 5°$ ノ場合ニハモットヨイ結果ガ得ラレルガ, $1°, 2°, 3°$ ノ場合ニハソレ程ノ期待ヲカケラレナイ、例ヘバ $1°$ ヲ取ッテ考ヘル、特異点 (I, i) ノ場合ニハ (β) ナル形ニ展開サレル (A) ノ解ガ含ム勝手ナ常数 C ノ値ハ $\lim_{x\to 0} x^{-\lambda}y=C$ ニヨッテ與ヘラレルガ, 特異点 (I, iii) ノ場合ニハ (A) ノ解 $y=\varphi(x, Cx^{\lambda})$ ガ (β) ナル形ニ漸近的ニ展開サレルトイフダケデハ常数 C ノ値ト (A) ノ解トノ間ノ對應ヲキメルコトガ出來ナイ、($x\to 0$ ノトキ $x^{\lambda}\to 0$ トナラナイカラデアル)、此ノ對應ヲキメルコトガ出來ルノハ

$$(1)\quad \sum_{n}\beta_{jn}u^{n}=\psi_j(u)$$

ガ0デナイ收斂半徑ヲ持ツ場合デアル、ソコデ此ノ場合ヲ狙ツタノデアル、ソレニハ假定 $3^\circ, 5^\circ$ ヲ取ラナケレバナラナイ。

3° スベテノ j ニ對シテ $\sum_k a_{jk} y^k$ ガ0デナイ收斂半徑ヲ持ツナラバ，級数(1)ハ0デナイ收斂半徑ヲ持チ，C ガ十分ニ小サイトキ（特異点(I, i)ノ場合ニハ C ガ取ル値ノ範圍ニ制限ハナカッタ！），(A′)ハ

$$y=\psi_0(Ce^{\lambda t})+o(1) \quad (\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\to-\infty)$$

ヲ満足スル解 $y=\varphi(t, Ce^{\lambda t})$ ヲ持チ，$\varphi(t,u)$ ハ

$$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\to-\infty,\ u\to 0$$

ノトキ

$$(\beta_1)\quad y\sim\sum\psi_j(u)e^{jt}$$

ナル形ニ展開サレル。

5° $\mu-\nu\tan\theta_0=0$ 且ツ半直線 $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$, $\sigma\leqq\sigma_0$ ガ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2$$

ノ内部ニ含マレルヤウナ τ_0, θ_0 ヲ取ル、$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$, $\sigma\to-\infty$ ノ場合ニハ 3° ノ場合ノ結果ガ使ヘルカラ (β_1') ナル形ニ展開サレル(A′)ノ解 $y=\varphi(t, Ce^{\lambda t})$ ガ存在スル、ソノ時 $\varphi(t,u)$ ノ漸近展開 (β_1') ハ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2,$$
$$\sigma\to-\infty,\ u\to 0$$

デ成立スル。

<u>證明ノ方針</u> 先ヅ $\psi_j(u)$ ガ満足スベキ線形微分方程式

ヲ作リ，ソレカラ $u=0$ デ正則デアルヤウナ $\psi_j(u)$ ガ唯一通リニキマルコトヲ確メル、続イテ

$$y=\sum_{j=0}^{N-1}\psi_j(u)e^{jt}+z$$

ト置キ，z ガ満足スル方程式

$$\frac{dz}{dt}=H(t,u,z)$$

ヲ特異点（I,i）ノ場合ト同様ナ方針デ取扱フ。

特異点(I,iv),(I,v)　以下述ベル定理ハ（I,iv),(I,v）何レノ場合ニモ通用スル。

$$\arg\lambda=\varpi,\quad 0\leqq\varpi<2\pi$$

トスル、故ニ1°,2°,3°ノ場合ハ

$$\mu-\nu\tan\theta_0<0$$

即チ　$|\theta_0+\varpi-\pi|<\frac{\pi}{2}$

4°,5°ノ場合ハ

$\theta_2\leqq\theta\leqq\theta_1$ ノトキ $\mu-\nu\tan\theta<0$

即チ　$|\theta+\varpi-\pi|<\frac{\pi}{2}$

6°ノ場合ハ $\nu=0$，$\mu<0$　即チ $\varpi=\pi$ ト假定スルコトニナル。

1°　$-\frac{\pi}{2}<\omega_2\leqq\theta_0+\varpi-\pi\leqq\omega_1<\frac{\pi}{2}$

トスル。

$$t^{(j)}=\sigma^{(j)}+i\tau^{(j)}\qquad(j=1,2,\text{--------})$$

ハ半直線 $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$，$\sigma\leqq\sigma_0$ ノ上ニアッテ ∞ ニ収斂スル点列、ソノトキ勝手ニ取ラレタ正ノ数 δ ニ對シテ正

ノ數Rヲ十分ニ大キクトレバ（点列$\{t^{(j)}\}$ニ関係シナイ），此ノ半直線ノ上デ連続デ$t^{(j)}$デ取ル値$s=s^{(j)}$が

(2) $\quad q_1+\delta+p\tan\omega_1<q<q_2-\delta+p\tan\omega_2,\quad p<-R$

ニ属スル（A″）ノ解ハ存在シナイ。

2° 特ニ考ヘ直ス程ノコトハナイ。

3° 点列$\{t^{(j)}\}$ノ意味ハ1°ト同ジ、$\Delta(>0)$が十分ニ小サケレバ半直線$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\leqq\sigma_0$ノ上デ連続デ，$t^{(j)}$ニ於テ取ル値$y^{(j)}$ノ絶對値が$\Delta$ヲ超エナイヤウナ（A′）ノ解ハ恒等的ニ0デアル。

4° $\quad -\frac{\pi}{2}<\omega_2\leqq\theta_2+\varpi-\pi\leqq\theta_1+\varpi-\pi\leqq\omega_1<\frac{\pi}{2}$

トスル、曲線$C: t=T(\sigma)\ (-\infty<\sigma\leqq\sigma_0)$ハ

(3) $\quad \tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2,\quad \sigma\leqq\sigma_0$

ニ含マレ，且ツ

$$\omega_2\leqq\arg T'(\sigma)+\varpi-\pi\leqq\omega_1$$

デアルトスル。

$$t^{(j)}=\sigma^{(j)}+i\tau^{(j)}\qquad (j=1,2,\text{------})$$

ハ曲線Cノ上ニアッテ∞ニ収斂スル点列、ソノトキ勝手ニ取ラレタ正ノ数δニ對シテ正ノ數Rが十分大キケレバ（点列$\{t^{(j)}\}$ニハ関係シナイ），Cノ上デ連続、$t^{(j)}$ニ於テ取ル値$s=s^{(j)}$が(2)ニ属スルヤウナ（A″）ノ解ハ存在シナイ。

5° 曲線$C: t=T(\sigma)\ (-\infty<\sigma\leqq\sigma_0)$ハ(3)ニ含マレ且ツ

$$\theta_2'=\underline{\lim}_{\sigma\to-\infty}\arg T'(\sigma),\quad \theta_1'=\overline{\lim}_{\sigma\to-\infty}\arg T'(\sigma)$$

ト置イタトキ

$$|\theta_1' + \varpi - \pi| < \frac{\pi}{2}, \quad |\theta_2' + \varpi - \pi| < \frac{\pi}{2}$$

トナルモノトスル、点列$\{t^{(j)}\}$ノ意味ハ4°ト同ジ、ソノ時$\Delta(>0)$ガ十分ニ小サケレバCノ上デ連続，$t^{(j)}$ニ於イテ取ル値$y^{(j)}$ノ絶對値ガΔヲ超エナイヤウナ(A′)ノ解ハ恒等的ニ0デアル。

6° 前ノ結果ニ於テ($\varpi=\pi$デアルカラ)θ_1', θ_2'ヲ幾ラデモ$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ニ近ク取ルコトガ出來ル、併シ$\theta_1'=\frac{\pi}{2}$, $\theta_2'=-\frac{\pi}{2}$トスルコトガ出來ナイコトハ*Malmquist*ノ研究ニ依テモ明カデアル(彼ハ(I, V)ノ場合シカ考ヘテヰナケレドモ)

<u>証明ノ方針</u>　以上ノ結果ハ次ノ補助定理カラ導キ出スノデアル。

補助定理「$\mathfrak{F}(t, s)$ハ

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + \sigma \tan\theta_0, \quad \sigma' \leqq \sigma \leqq \sigma'' \\ |s - \lambda t - \Gamma| \leqq \delta \end{cases}$$

デ連続デ

$$|e^{-s}\mathfrak{F}(t, s) - \lambda| \leqq A(e^{\sigma} + e^{p})$$

ヲ満足シ，$\mu - \nu \tan\theta_0 < 0$　且ツ

$$A\left\{e^{\sigma''} - \frac{e^{p+\delta}}{\mu - \nu \tan\theta_0}\right\} < \delta \cos\theta_0$$

デアルトスル、其ノトキ$t=t'$デ$s=s'$トナル(A″)ノ解ハ

$$\tau = \tau_0 + \sigma \tan\theta_0, \quad \sigma' \leqq \sigma \leqq \sigma''$$

デ連続デ

$$\left|s-\lambda t-\Gamma\right| \leqq A \sec\theta_0 \left\{ e^{\sigma} - \frac{e^{p'+\delta}}{\mu-\nu\tan\theta_0} \right\} < \delta$$

ヲ満足スル、但シ

$$t'=\sigma'+i\tau', \quad \tau'=\tau_0+\sigma'\tan\theta_0,$$
$$s'=p'+iq'=\lambda t'+\Gamma$$

トスル。」

注意　以上ノ結果ニ依ッテ例ヘバ $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$, $\sigma\leqq\sigma_0$ ナル半直線ニ沿ッテ t ガ ∞ ニ近ヅクトキ(A″)或ハ(A′)ノ解ノ取ル値ハ考ヘテ牛ル範囲外ニ出テシマフカラ、ソノ解ノ漸近展開ガ求マル筈ハナイシ、コレ以上精密ナ結果ヲ要求スル必要ハナイト思フガ、此ノ場合ニモ形式的解(β)ガ無意味トナルワケデナイコトダケ注意シテ置カウ、例ヘバ(I,iv,3)ノ場合ニツイテ言ヘバ

「$\varphi(t,u)$ ハ

$$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0, \ \sigma\leqq\sigma_1, \quad |u|\leqq\Delta,$$

デ定義サレ，此ノ中カラ (t,u) ガ $(\infty,0)$ ニ近ヅクトキ(β′)ナル形ニ展開サレ、而モ $y=\varphi(t,Ce^{\lambda t})$ ガ(A′)ノ解ヲ表ハスヤウニ勝手ナ常数 C ヲ導入スルコトガ出來ル」(I,i)ノ場合ト異ナル所ハ Cノ導入ノ仕方ガ唯一通リデナイトイフコトデアル、以上デ総テノ場合ヲ通ジテ形式的解(β)ノ意味ガ明カトナッタワケデアル。

昭和十一年度1月—6月分ノ會費金貳円也
ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區
大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

振替口座番號　大阪一七七四三番

前期會計決算ハ第84号ニ報告シテアリマス。