430. 非同次型線狀移動可能函數方程式ニ就イテ (I)

北川 敏男 (阪大)

1. Λ^{k} $(k=0,1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲバ、ソノ母函數ガ整函數デアル様ナ Linear translatable operation トシ, 以下 $(-\infty,\infty)$ デ與ヘラレタ函數 $g(x)$ ニ對シテ

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{n}\underset{x}{\Lambda}^{k} f^{(k)}(t)=g(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

ナル函數方程式、コレヲ非同次型線狀移動可能函數方程式ト假リニ名付ケル——ヲ論ズル。

(1) ハ特別ノ場合トシテ Nörlund, Ghermanesco, Bochner 等ノ論ジタ定差方程式ヲ含ム。コレラノ諸氏ノ理論ヲ擴張シテ、成ルベク Λ^k ニ制限ヲツケナイデ、同様ナ結果ヲ得ヤウトスルトキニハ、筆者ノ所謂 association ノ考ヘヲ必要トスルカト思ハレル。コレニツイテハ，数物ノ年會デ申シ上ゲタノデ、ココデハ，少シ立場ヲ変ヘテ論ジテミタイ。所謂定差法ガソウデアル如ク、以下ニ於イテモ吾々ハ

$$(2)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0+b} g(t)\left\{\int_{\mathbb{C}_r^{(+)}} \frac{e^{\lambda(x-t)}}{P_r(\lambda)\,G(\lambda)}\,d\lambda\right\}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0+a} g(t)\left\{\int_{\mathbb{C}_r^{(-)}} \frac{e^{\lambda(x-t)}}{P_r(\lambda)\,G(\lambda)}\,d\lambda\right\}$$

$$=N_r(x, x_0;\, g\cdot P_r)\quad \text{(トオク)}$$

ナル形ノ積分値ノ計算取扱ヒトシテ、今マデ知ラレテヰル結果ヲマトメツツ、又少シク前進シタイ。ココニ、$G(\lambda)$ ハ Linear translatable (differential) operation $\sum \Lambda^k f^{(k)}(x)$ ノ母函数デアル:

$$(3)\quad G(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k \underset{x=0}{\Lambda^k} e^{\lambda t}$$

Contour $\mathbb{C}_r$ ヲ虚軸デ分ケテ正ノ方ヲ $\mathbb{C}_r^{(+)}$, 負ノ方ヲ $\mathbb{C}_r^{(-)}$ トスル。

$\{P_r(\lambda)\}$, $\{\mathbb{C}_r\}$ ノ選定ハアトデキメル。(ソレハ，吾々ノ目標ニ應ジテ適當ニトル)

2. 先ヅ、吾々ハ，(2) ノ degenerate form トシテ Schmidt ノ函数 (Math. Ann. Bd. 70 参照) ナル古典的

方法ヲ理解スルタメ(2)ノ変形ヲ次ノ如ク試ミル:

函數 $g^{(p)}(x+s)$ ヲバ、$g_s^{(p)}$ デ表ハス、又簡單ノタメニ、

$$(4)\quad \angle p(\lambda;\zeta,\tau:g)\equiv\sum_{i=1}^{p} g^{(p-i)}(\tau)\lambda^{i-1}e^{\lambda(\zeta-\tau)},$$

トオクナラバ、*elementary* ナ計算ノ結果トシテ

$$(5)\quad N_r(x,x_0;g_s^{(p)}:P_r)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0+b} g(\tau)\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(+)}}\frac{\lambda^p e^{\lambda(x+s-\tau)}}{P_r(\lambda)G(\lambda)}d\lambda\right\}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0+a} g(\tau)\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(-)}}\frac{\lambda^p e^{\lambda(x+s-\tau)}}{P_r(\lambda)G(\lambda)}d\lambda\right\}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{1}{G(\lambda)P_r(\lambda)}\angle p(\lambda;x+s,x_0+s:g)\,d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0+s}^{x_0} g(\tau)\left\{\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{\lambda^p e^{\lambda(x+s-\tau)}}{P_r(\lambda)\,G(\lambda)}d\lambda\right\}d\tau$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r^{(+)}}\frac{1}{P_r(\lambda)G(\lambda)}\angle p(\lambda;x_0+s,x_0+s+b:g)\,d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r^{(-)}}\frac{1}{P_r(\lambda)G(\lambda)}\angle p(\lambda;x_0+s,x_0+s+a:g)\,d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0+b}^{x_0+b+s} g(\tau)\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(+)}}\frac{\lambda^p e^{\lambda(x+s-\tau)}}{P_r(\lambda)G(\lambda)}d\lambda\right\}d\tau$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0+a}^{x_0+a+s} g(\tau)\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(-)}}\frac{\lambda^p e^{\lambda(x+s-\tau)}}{P_r(\lambda)\,G(\lambda)}d\lambda\right\}d\tau.$$

コノ結果ヲ利用シ、又 *linear translatability* ノ故ニ，積

分ト Operation Λ^k トノ順序交換ガ許サレルトイフ事實ト，コノ二ツノ事カラ

(6) $N_r(x, x_0 ; \Gamma_s g_s : P_r)$

$$\equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0+b} \Gamma_0{}_s\left\{g(s+t)\right\}\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(+)}} \frac{e^{\lambda(x-t)}}{P_r(\lambda)G(\lambda)}d\lambda\right\}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0+a} \Gamma_0{}_s\left\{g(s+t)\right\}\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(-)}} \frac{e^{\lambda(x-t)}}{P_r(\lambda)G(\lambda)}d\lambda\right\}dt$$

ハ以下ニ述ベル所ノ八個ノ summanden $N_r^{(k)}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, 8)$ ニ分ケ得ル。

コレラハ，取扱上ハ次ノ五種ニ分類シウル。

第一種：

(7.1) $$N_r^{(1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0+b} g(\tau)\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(+)}} \frac{e^{\lambda(x-\tau)}}{P_r(\lambda)}d\lambda\right\}d\tau$$

(7.2) $$N_r^{(2)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0+a} g(\tau)\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(-)}} \frac{e^{\lambda(x-\tau)}}{P_r(\lambda)}d\lambda\right\}d\tau$$

第二種：

(8.1) $$N_r^{(3)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{p=0}^{n} \Lambda_0{}_s^p\left\{\int_{x_0+b}^{x_0+b+s} g(\tau)\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(+)}} \frac{\lambda^p e^{\lambda(x+s-\tau)}}{P_r(\lambda)G(\lambda)}d\lambda\right\}d\tau\right\}$$

(8.2) $$N_r^{(4)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{p=0}^{n} \Lambda_0{}_s^p\left\{\int_{x_0+a}^{x_0+a+s} g(\tau)\left\{\int_{\mathfrak{C}_r^{(-)}} \frac{\lambda^p e^{\lambda(x+s-\tau)}}{P_r(\lambda)G(\lambda)}d\lambda\right\}d\tau\right\}$$

第三種：

(9.1) $$N_r^{(5)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r^{(+)}} \frac{1}{P_r(\lambda)G(\lambda)}\sum_{p=0}^{n} \Lambda_0{}_s^p\left\{\angle\rho(\lambda ; x+s,\ x_0+s+b : g)\right\}d\lambda$$

(9.2) $$N_r^{(6)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r^{(-)}}\frac{1}{P_r(\lambda)\,G(\lambda)}\sum_{p=0}^{n}\Lambda_{0}^{p}{}_{s}\left\{\angle\rho(x;x+s,x_0+s+a:g)\right\}d\lambda$$

第四種：

(10) $$N_r^{(7)}=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{1}{G(\lambda)P_r(\lambda)}\sum_{p=0}^{n}\Lambda_{0}^{p}{}_{s}\left\{\angle\rho(\lambda;x+s,x_0+s:g)\right\}d\lambda$$

第五種：

(11) $$N_r^{(8)}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{p=0}^{n}\Lambda_{0}^{p}{}_{s}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0+s}^{x_0}g(\tau)\left\{\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{\lambda^{p}e^{\lambda(x+s-\tau)}}{P_r(\lambda)\,G(\lambda)}d\lambda\right\}d\tau\right\}$$

3. 問題ハ18個ノ積分ノ *estimation* ニ歸シタ。先ヅ吾々一般ニ

(12) $$\sum_{p=0}^{n}\Lambda_{0}^{p}{}_{s}\left\{\angle\rho(\lambda;\zeta+s,\eta+s:g)\right\}$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=0}^{p-1}\lambda^{i-1}e^{\lambda(\zeta-\eta)}\Lambda_{0}^{p}{}_{s}\left\{g^{(p-i)}(\eta+s)\right\}$$

ナルコトニ注意スル。然ルトキ、第四，五種ハ $\mathfrak{C}_r$ ニカコマレタ $G(\lambda)$ ニ関スル *residues* ニ起因スルモノデアルコトガ分ル。又第二種ノ積分ハ勿論ノコト，第三種モ亦結局

(13.1) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r^{(+)}}\frac{\lambda^{k}e^{\lambda(x-s)}}{P_r(\lambda)\,G(\lambda)}d\lambda$$

(13.2) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r^{(-)}}\frac{\lambda^{k}e^{\lambda(x-a)}}{P_r(\lambda)\,G(\lambda)}d\lambda$$

ノ *estimation* ニ帰着スルコトガワカル。

コレ等ノ事實カラ、吾々ハ，(1) ノ解 $f(x)$ ニ関シテ若干ノ *assertation* ヲナシウルノデアル。又、次ニ示ス如ク

如何ニシテ吾々ガ*Schmidt*ノ方法ニ到達スルカヾ明カニナルト思ハレル。

〔校正〕 426. 組合函数方程式ニツイテ(III)ニ於イテ、P.21
補助定理IIデ"*kommutator*"ハ"*kommutativ*"，補助定理(IV)デ(6)ハ $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\cdot\gamma\oplus\beta\cdot\gamma$.