428. 多元体ノ賦値ニ就イテ, II

守屋美賀雄（北大）

§4. *Derivierte Divisionsalgebren* ノ構造

前節デハ或ル k 上ノ多元体 D カラ *derivierte Divisionsalgebra* $\bar{D}$ ヲツクルコトガ出来ルトイフ所マデ述ベタ、所ガ D ノ賦値 Φ ハ k ノ賦値 φ ノ接続デアルカラ、k ノ元カラツクラレタ基本列ノ全体ハ矢張リ $\bar{D}$ ノ中ニソノ極限元ヲ有スル、勿論コレ等ノ極限元ガ何レモ乗法ニ関シテ $\bar{D}$ ノ任意ノ元ト可換デアルコトハ明デアラウ。依ッテ k ノ φ ニ関スル *derivierter Körper* $\bar{k}$（即 k ニ於ケル基本列ノ全体）ガ $\bar{D}$ ニ含マレル証明シタイノハ

$$\bar{D}=D\times\bar{k}$$

トイフコトデアル。

ソレニハ問題ヲ少々一般ニシテ、

基礎体 k ガ φ ニ関シテ完全ナラバ k 上ノ n 階ノ多元体 D ハ常ニ φ ノ接続性賦値 Φ ニ関シテ完全デアル。

トイフ定理ヲ証明シヨウ。コノ定理ハ k ノ代数的擴大体 K ガ有限次（k ニ関シテ）ナラバ K ハ k ノ接続賦値ニ関シテ、完全デアルトイフ定理ト同種類ノモノデアル。証明ノ方法モ似テ居ル。簡単ノタメ D ノ元 α ノ賦値ガ負デナイトキ即チ $\Phi(\alpha)\geqq 0$ ナラバ α ヲ D ノ整元ト呼ブコトニスル。サテ α ガ D ノ整元ナラバ α ノ満足スル k ノ既約方程式

$$f(x)=x^{m}+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m=0$$

ニ於テハ $\varphi(a_m)\geqq 0$ デナクテハナラヌ。k ノ有スル性質Ⅱニヨリ $a_1, \cdots\cdots, a_{m-1}$ ハ悉ク k ノ整元トナル、ダカラ α ノ指標方程式

$$|xE-A|=F(x)=\left(f(x)\right)^{\frac{n}{m}}$$

ノ係數ハ k ノ整元トナル。$F(x)$ ノ x^{n-1} ノ係數ヲ以下 α ノ Spur ト呼ビ $s(\alpha)$ ヲ以テアラハス。然ラバ

$$\Phi(\alpha)\geqq 0 \longrightarrow \varphi(s(\alpha))\geqq 0$$

デアル。

サテ今 D ノ k ニ關スル底元（コレヲ以下簡單ニ D ノ k-基ト呼ブ）ヲ $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ トスレバ、之レニ k ノアル一ツノ整元 a ヲ乘ジテ $a\omega_1, \cdots\cdots, a\omega_n$ ヲ D ノ整元ナラシムルコトガ出來ル。（k ノ賦値條件Ⅰニ依ル）且ツカクシテ得ラレタ $a\omega_1, \cdots\cdots, a\omega_n$ ハ明ニ D ノ k-基ヲナシテ居ル、ソコデ便宜ノタメ $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ ガ悉ク D ノ整元デアルト假定シヨウ。サテ、コノ樣ナ整元ナル k-基ヲ用ヒテ D ノアル整元 α ヲ

$$\alpha = c_1\omega_1 + \cdots\cdots + c_n\omega_n$$

ト書キ表ハシタトキ（但シ $c_1, \cdots\cdots, c_n$ ハ k ノ元トスル）．コヽデ $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ ノ賦値ハ下ニ有界デアルトイフコトヲ第一ニ證明スル、α ノ右辺ニ順次 $\omega_1, \cdots\cdots \omega_n$ ヲ乘ジテソノ Spur ヲトルト

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} s(\alpha\omega_1) = c_1 s(\omega_1\omega_1) + \cdots\cdots + c_n s(\omega_n\omega_1) \\ \vdots \\ s(\alpha\omega_n) = c_1 s(\omega_1\omega_n) + \cdots\cdots + c_n s(\omega_n\omega_n) \end{cases}$$

ヲ得ル、假定ニヨレバ $\alpha, \omega_1, \cdots\cdots, \omega_n$ ガ何レモDノ整元デアルカラ、$s(\alpha\omega_i)$, $s(\omega_i\omega_j)$, $(i, j=1, \cdots\cdots n)$ ハ何レモkノ整元デアル。即チ $\varphi(s(\alpha, \omega_i)) \geqq 0$, $\varphi(s(\omega_i\omega_j)) \geqq 0$.
又Dガ*halbeinfach*デアルトイフコトカラ

$$\Delta(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n) = \begin{vmatrix} s(\omega_1\omega_1) & \cdots\cdots & s(\omega_n\omega_1) \\ \vdots & & \\ s(\omega_1\omega_n) & \cdots\cdots & s(\omega_n\omega_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

デアル。(I)カラ

$$c_i = \frac{\Delta_i}{\Delta(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n)}$$

ヲ得ル。コヽニ Δ_i トハ $\Delta(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n)$ ニ於イテ第i列ヲ $s(\alpha\omega_1), \cdots\cdots, s(\alpha\omega_n)$ デ置キカヘタ行列式デアル。サテ明カニ Δ_i 及ビ $\Delta(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n)$ ハkノ整元デ且ツ後者ハkー基 $\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n$ ニ依ツテ、一意的ニ定マルモノ故 $\varphi(c_i)$ ハ常ニ下ニ有界デアル。依ツテ適當ナ實數 ρ ヲトレバDノ任意ノ整元αヲkノ元ヲ係數ニ有スル $\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n$ ノ一次形式トシテアラハシタトキ、ソレ等係數ノ賦値ハ常ニ ρ ヨリ小デハナイ。

サテ、次ニαノ賦値$\Phi(\alpha)$ガ十分ニ大キクナツタトスル、然ラバkノ或ル單位元ナラザル整元 a ニ對シテ(勿論aヲ適當ニトラネバナラナイ、シカシ此ノヤウナaハ常ニ存在スル)

$$0 < \varphi(a^m) \leqq \Phi(\alpha) < \Phi(a^{m+1})$$

ナラシムルコトガ出來ル。コヽデ$\Phi(\alpha)$ガ増大シテ行ケバソ

レニツレテ m が増大シテ行ク譯デアル。明カニ $\frac{\alpha}{a^m}$ ハDノ整元、依ッテ

$$\frac{\alpha}{a^m}=d_1\omega_1+\cdots\cdots+d_n\omega_n$$

ト置イタトキ $\varphi(d_1),\cdots\cdots,\varphi(d_n)$ ハ何レモ ρ ヨリハ小サクハナイ。サテ

$$\alpha=a^m d_1\omega_1+\cdots\cdots+a^m d_n\omega_n=c_1\omega_1+\cdots\cdots+c_n\omega_n$$

デアルカラ $\omega_1,\cdots\cdots,\omega_n$ が k—基トイフコトカラ

$$a^m d_1=c_1,\cdots\cdots,a^m d_n=c_n$$

ヲ得ル、即チ

$$\varphi(c_i)=m\varphi(a)+\varphi(d_i)\qquad(i=1,\cdots\cdots n)$$

依ッテ今 $\Phi(\alpha)\longrightarrow\infty$ トスレバ前ニ述ベタ如ク $m\longrightarrow\infty$ デアリ、從ッテ

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(c_i)\longrightarrow\infty$$

デアラウ、即チ

$$\alpha=c_1\omega_1+\cdots\cdots+c_n\omega_n$$

ニ於イテ $\Phi(\alpha)$ が如何程デモ大キクナレバ、ソレニ應ジテ $\varphi(c_1),\cdots\cdots,\varphi(c_n)$ モ亦如何程デモ大キクナラナケレバイケナイトイフノデアル。(コノ逆ハ明白デアル)

サテ今、Dノ基本列

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_i,\cdots\cdots$$

が與ヘラレタトキ $\alpha_i=c_1^{(i)}\omega_1+\cdots\cdots+c_n^{(i)}\omega_n$ (但シ $c_1^{(i)},\cdots\cdots,c_n^{(i)}$ ハ何レモ k ノ元) ト置ケバ

$$\alpha_{m_1}-\alpha_{m_2}=\left(c_1^{(m_1)}-c_1^{(m_2)}\right)\omega_1+\cdots\cdots+\left(c_n^{(m_1)}-c_n^{(m_2)}\right)\omega_n$$

トナル、サテ $\overline{\Phi}(\alpha_{m_1}-\alpha_{m_2})$ ハ m_1, m_2 ガ大キクナルニツレテ、イクラデモ大キクナル譯デアルカラ（基本列ナル故）既ニ証明シタ事實ニヨリ、n 個ノ元列

$$c_j^{(1)}, \cdots\cdots c_j^{(i)}, \cdots\cdots \qquad (j=1, \cdots\cdots n)$$

ガ基本列ヲツクラネバナラナイトイフコトガ出テクル。所デ k ハ φ ニ関シテ完全デアル故上記 n 個ノ基本列ハ何レモ k ニ於テ極限元 $c_1, \cdots\cdots, c_n$ ヲ有スル、明カニ

$$\alpha = c_1\omega_1 + \cdots\cdots + c_n\omega_n$$

ハ $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_i, \cdots\cdots$ ノ極限元デアラウ。依ッテ<u>D ハ $\overline{\Phi}$ ニ関シテ完全デアル</u>。即チ

基礎体 k ガ φ ニ関シテ完全ナラバ D ハ φ ノ接続賦値 $\overline{\Phi}$ ニ関シテ完全デアル。

サテ、愈々本節ノ初メノ問題ニ戻ル。k ガ relativ perfektor Körper デ D ガ k ニ関シテ有限階ノ多元体ナルトキ、D カラ derivierte Divisionsalgebra $\overline{D}$ ガ出テクル、ソシテ $\overline{D}$ ハ k ノ derivierter Körper $\overline{k}$ ヲ含ム、明カニ

$$D \times \overline{k} \subseteqq \overline{D}$$

デアラウ。次ニ $D \times \overline{k}$ ハ $\overline{D}$ ノ部分環ナル故 $\overline{k}$ 上ノ多元体、且ツ $\overline{k}$ ハ φ ニ関シテ完全体ダカラ $D \times \overline{k}$ ハ $\overline{\Phi}$ ニ関シテ又、完全デアル。ソシテ $D \times \overline{k}$ ハ D ヲ含ム、然ラバ $\overline{D}$ ガ D ノ derivierte Divisionsalgebra トイフコトヨリ

$$\overline{D} \subseteqq D \times \overline{k}$$

即チ $\overline{D} = D \times \overline{k}$

デアル。

昭和十一年度1月―6月分ノ會費金貳圓也

ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

振替口座番號　大阪一七七四三番

前期會計決算ハ第84号ニ報告シテアリマス。