422. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, IX

福原満洲雄（北大）

形式的解 (β)　コレヲ論ズルトキニハ $a_{j0}=0$ ト假定スル、漸近的ニ (α) ナル形ニ展開サレル (A) ノ解 $y=\varphi(x)$ ヲ取り，$z=y-\varphi(x)$ ナル置換ヲ行ヘバ z が満足スル方程式ハ $z=0$ ヲ解トシテ持ツカラ $a_{j0}=0$ ノ場合ニ帰着サレル、故ニ $3^\circ, 5^\circ, 6^\circ$ 即チ $f(x,y)$ が $y=0$ ノ近傍デ y ノ正則函数デアル場合ハ $a_{j0}=0$ ト假定シテモ一般性ヲ失フコトニハナラナイが、例ヘバ假定 1° ヲ取ッタ場合ニ $\mathfrak{F}(t,s)$ が 1° ヲ満足シテ井テモ，z ノ方程式ノ右辺ハソレト同様ナ條件ヲ満足シナイ。コレハ假定ノトリ方がマヅイカラデアラウが，コヽデハサウイフ問題ニ立入ラナイ。

x, y ノ代リニ変数 t, y ヲ取レバ (β), (C), (c) ハ

(β')　$y \sim \sum \alpha_{jk} e^{jt} (Ce^{\lambda t})^k$

(C')　$\dfrac{dz}{dt} = G(t, Ce^{\lambda t}, z)$

(c')　$G(t,\zeta,z) \sim \sum b_{jkl} e^{jt} \zeta^k z^l$

トナル．更ニ変数 t, s ヲ取レバ (β') ハ

(β'')　$s \sim \lambda t + \Gamma + \sum \beta_{jk} e^{jt + k(\lambda t + \Gamma)}$　$(\beta_{00}=0)$

トナル。$G(t, Ce^{\lambda t}, z) = g(t, \lambda t + \Gamma, z)$ ト置クコトニヨリ，(C'), (c') ハ

(C'')　$\dfrac{dz}{dt} = g(t, \lambda t + \Gamma, z)$

(c″) $g(t,\zeta,z)\sim\sum b_{jkl}e^{jt+k\zeta}z^{l}$

トナル。

<u>特異点(I, i)</u>　λハ0デモ正ノ整数デモナク，$\mu-\nu\tan\theta>0$ トナルヤウナθガ考ヘテヰル範囲ニ存在スル場合ガアル、故ニ假定1°, 2°, 3°ヲ取ルナラバ $\mu-\nu\tan\theta_0>0$ ノ場合，假定4°, 5°ヲ取ルナラバ $\mu-\nu\tan\theta_1>0$ 又ハ $\mu-\nu\tan\theta_2>0$ トナル場合，假定6°ヲ取ルナラバ（θ_1ハ幾ラデモ$+\frac{\pi}{2}$ニ，θ_2ハ幾ラデモ$-\frac{\pi}{2}$ニ近ク取レルカラ）λガ負ノ實數デナイ場合トナル。

尚ホθ, ωナドノ角ハ$-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ノ間ノ値ヲ取ルモノトスル。

1°　$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$,　$\sigma\leqq\sigma_0$ ナルトキ

$s=\lambda t+\Gamma$ ハ

$$q_1+p\tan\omega_1<q<q_2+p\tan\omega_2,\quad p<p_0$$

ニ含マレルナラバ $s=\lambda t+\Gamma+o(1)$ ヲ滿足スル(A″)ノ解 $s=\varphi(t,\zeta)$ （$\zeta=\xi+i\eta=\lambda t+\Gamma$）ハ

$$\begin{cases}\tau=\sigma\tan\theta_0, & \sigma\to-\infty\\ q_1+0+\xi\tan\omega_1<\eta<q_2-0+\xi\tan\omega_2\end{cases}$$

ノトキ(β″)ナル形ニ展開サレル。

2°　上ニ述ベタ解 $s=\varphi(t,\zeta)$ （$\zeta=\lambda t+\Gamma$）ハζノ函數ト考ヘテ正則デアル。

3°　$y=e^{\lambda t}(C+o(1))$ ヲ滿足スル(A′)ノ解 $y=\varphi(t,\zeta)$ （$\zeta=Ce^{\lambda t}$）ハ

$$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\quad \sigma\to-\infty,\quad \zeta\to 0$$

ノ時 (β') ナル形ニ展開サレ，従ッテζノ函數ト考ヘテ $\zeta=0$ デ正則デアル。

$4°$ $t=\sigma+i\tau$ ガ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2,\quad \sigma\leqq\sigma_0$$

ニ属スルトキ $s=\lambda t+\Gamma$ ハ

$$q_1+p\tan\omega_1<p<q_2+p\tan\omega_2,\quad p<p_0$$

ニ含マレルナラバ $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\to-\infty$ ノトキ(β') ナル形ニ展開サレル (A″) ノ解 $s=\varphi(t,\zeta)$ $(\zeta=\lambda t+\Gamma)$ ハ

$$\begin{cases}\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2, & \sigma\to-\infty\\ q_1+0+\xi\tan\omega_1<q_2-0+\xi\tan\omega_2, & \xi\to-\infty\end{cases}$$

ノトキ連続デ (β'') ナル形ニ展開サレ，内部デ t,ξ ノ正則函數デアル。

$5°$ $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\to-\infty$ ノトキ (β') ナル形ニ展開サレル(A′)ノ解 $y=\varphi(t,\zeta)$ $(\zeta=Ce^{\lambda t})$ ハ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2,\quad \sigma\to-\infty,\ \zeta\to0$$

ノトキ (β') ナル形ニ展開サレ、従ッテ $\zeta=0$ デζノ正則函數トナル。

$6°$ (β) ハ $x,\ Cx^{\lambda}$ ガ十分ニ小サイトキ收斂デ、ソノ和ガ(A)ノ解トナル。

<u>証明ノ方針</u>　$1°$ 先ヅNガ十分ニ大キイトキ次ノ定理ヲ証明スル。

豫備定理1. 「正ノ數 δ ニ對シテ K, R (>0) ヲ十分ニ大キク取ッテ

$$\begin{cases} q_1+\delta+\xi'\tan\omega_1<\eta'<q_2-\delta+\xi'\tan\omega_2 \\ \sigma'\leqq -R,\quad \xi'\leqq -R \end{cases}$$

ナルトキ $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ -\infty<\sigma\leqq\sigma'$ デ

$$(C_1'')\quad \frac{dz}{d\sigma}=(1+i\tan\theta_0)\,g(t,\zeta,z)\quad(\zeta=\lambda t+\Gamma)$$

ハ

$$(1)\qquad |z|\leqq K\{e^{(N-1)\sigma+\xi}+e^{N\xi}\}$$

ヲ満足スル解ヲ持ツ、但

$$\begin{cases} \tau'=\tau_0+\sigma'\tan\theta_0,\quad t'=\sigma'+i\tau' \\ \zeta=\xi+i\eta=\lambda t+\Gamma,\quad \zeta'=\xi'+i\eta'=\lambda t'+\Gamma \end{cases}$$

デアル」

豫備定理２.「$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\to-\infty$ ノトキ $z=O(e^{M\sigma})$ ヲ満足スル (C_1'') ノ解ハ $-\infty<\sigma\leqq\sigma'$ デ (1) ヲ満足スルヤウニ N ニ関係シナイ M ヲ取ルコトガ出来ル」

コレガ証明サレタトスレバ N ガアルキマッタ値 N_0 ヲ取ッタトキ豫備定理１デ存在スルコトガ分ッタ解ヲ

$$y=\varphi(t,\zeta)-\sum_{j+k<N_0}\alpha_{jk}e^{jt+k\zeta}$$

デ表ハス、勝手ナ N ニ對シテ

$$z=\varphi(t,\zeta)-\sum_{j+k<N}\alpha_{jk}e^{jt+k\zeta}$$

ハ (C_1'') ノ解デアルカラ予備定理２ニ依ッテソレハ (1) ヲ満足スル、コレデ $\varphi(t,\zeta)$ ガ (β') ナル形ニ，或ハ $\log\varphi(t,\zeta)$ ガ (β'') ナル形ニ展開サレルコトヲ知ル。

$2°$ $$\psi(t,\zeta)=\varphi(t,\zeta)-\sum_{j+k<N}\alpha_{jk}e^{jt+k\zeta}$$

ガ ζ ニ関シテ正則デアルコトヲ証明スレバヨイ、ソレニハ (C_1'') ノ解 $z=\psi(t,\lambda t+\Gamma)$ ガ Γ ニ関シテ微分出来ルコトヲ証明スレバヨイ。

$3°$ $\varphi(t,\zeta+2\pi i)=\varphi(t)+2\pi i$ ニ注意スレバヨイ。

$4°$ $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$, $\sigma\to-\infty$ ノトキ (1) ヲ満足スル (C'') ノ解 $z=\psi(t,\zeta)$ ヲ取ル。$\sigma'+i\tau'=t'$ ヲ半直線 $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$, $\sigma\leqq\sigma_0$ ノ上ニ取レバ $z=\psi(t,\zeta)$ ガ (t',ζ') ニ於イテ (1) ヲ満足シテヰルカラ，更ニ (C'') ノ解 $\psi(t,\zeta)$ ガ $\tau=\tau'+(\sigma-\sigma')\tan\theta'$ ナル直線ノ上デ満足シテヰル不等式ヲ求メル、θ' ハ計算ニ都合ガヨイヤウニキメル。

$5°$ $\varphi(t,\zeta+2\pi i)=\varphi(t)+2\pi i$ ニ注意スレバヨイ。

$6°$ $\varphi_n(t)$ ガ $2\pi i$ ヲ週期トスルコトヲ証明スレバヨイ，コレハ $\varphi_n(t)$ ガ満足スベキ線形微分方程式ヲ求メテ見レバ分ル。

[注意] (I, i, 5) ニ於テ $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$, $\sigma\leqq\sigma_0$ ナル半直線ハ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1<\tau<\tau_2+\sigma\tan\theta_2$$

ニ含マレ，且ツ $\mu-\nu\tan\theta_0>0$ トナルヤウナ勝手ナモノヲ取ッテヨイ。