417. 多元体(Divisionsalgebra)ノ賦値(Bewertung)ニツイテ

守屋美賀雄(北大)

kガアル可換体デ且ツ賦値付ケラレテ(bewertet)居ルトキ，kニ関スル代数的拡大体Kニ於テkノBewertungガ保持サレテ居ル様ナBewertungガ存在スルカドウカ、又存在スルトキハコレガ如何様ニシテ定メラレルカト云フ問題ハ賦値論ニ於ケル一ツノ重要ナ問題デアリ之レニ関シテハA. Ostrowskiノ系統的ナ研究ガアル(Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Math. Zeit. Bd. 39(1935)).

所ガ一方HasseハHenselノ$\mathfrak{p}$—進数体ヲ基礎体ニ有スル有限階ノ多元体ヲ取リ扱ッタ際ニコノ多元体ニ基礎体ノ賦値ヲ保持スルヤウナ賦値ヲ與ヘルコトニ成功シテ居ル(Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme Math. Ann. Bd. 104 1931)元來Henselノ$\mathfrak{p}$—進数体トイフノハ之レヲ賦値論ノ立場カラ見レバアル

一ツノ diskrete Bewertung ニ關スル完全体（perfekter Körper）ノコトデアル。ソコデ今、自分ハ次ノコトヲ問題ニシテ見タイト思フ。

kガ diskrete Bewertung ニ關シテ完全体トイフ樣ナ特殊ナモノデハナク、モウ少々一般的ナ性質ヲ有スル賦値付ケラレタ Körper トスルトキ、コレヲ基礎体ニ有スル有限階ノ多元体ニkノ賦値ノ接続（kノ賦値ヲ保持スルヤウナ賦値ノコト）ヲ求メルコトガ出來ルカ？　又求メルコトが出來タトスレバ如何ニシテコレヲ定ムベキカ？　コノ問題ヲ取扱フタメニ

第一．基礎体k（標数ハ常ニ 0）ニハ次ノ樣ナ Exponentenbewertung φガ與ヘラレテヰル。

1. $a \in k$ニ對シテ$\varphi(a)$ハaニ依ッテ一意的ニ定マル実数 $\varphi(0)=\infty$ 且ツ又適當ナkノ元aニ對シテハ$\varphi(a) \neq 0$ ナラシムルコトが出來ル。

2. $a, b \in k$ニ對シテ $\varphi(ab)=\varphi(a)+\varphi(b)$

3. $a, b \in k$ニ對シテ $\varphi(a+b) \geqq \mathrm{Min}\,(\varphi(a).\ \varphi(b))$.

kノ元aガ$\varphi(a) \geqq 0$ナル性質ヲ有スルトキaヲkノ整元ト呼ビ特ニ$\varphi(a)=0$ナラバaヲkノ單位元トイフコトニスル。

第二．kハφニ関シテ <u>relativ perfekten Körper</u> デアル、即チ

kノ整元ヲ係数ニ持ツxノ多項式

$$h(x)=a_0x^r+\cdots\cdots+a_r$$

ニ於テ少クトモ、アル一ツノ x^i ノ係数ガ単位元（但シ $0<i<r$）デ且ツ $\varphi(a_r)>0$ ナラバ $h(x)$ ハ k ニ於テ可約（reduzibel）デアル。

k ガ relativ perfekten Körper デアルトキニハ次ノ諸定理ガ成立スル。（何レモ Ostrowski ノ前述ノ論文参照、但シ Ostrowski ノ論文デハ Bewertung ガ Exponenten-bewertung デナク Kürschák ノ定義ニヨル Bewertung デアル！）

I. $h(x)=a_0x^r+\cdots\cdots\cdots a_r$

ヲ整係数ヲ有スル k ノ既約多項式トスルト

$$\varphi(a_i)\geqq \mathrm{Min}(\varphi(a_0),\ \varphi(a_r)) \quad 但シ\ r>i>0.$$

II. k ノ代数的拡大体 K ニハ常ニ φ ノ接続ガ存在スル。

即チ，K ノ任意ノ元 γ ガ k ニ於ケル一ツノ既約方程式

$$x^r+a_1x^{r-1}+\cdots\cdots\cdots+a_r=0$$

ノ根ナルトキハ γ ノ賦値トシテ $\frac{1}{r}\varphi(a_r)$ ヲ与ヘレバヨイ。

III. II ニ於テ定メラレタ K ノ賦値ガ K ニ於ケル唯一ノ φ ノ接続デアル。

サテ relativ perfekte Körper ノ例トシテ何ガアルカトイヘバ

1. φ ニ関スル完全体

2. k ノ中ニ φ ニ関スル一ツノ完全体 k_0 ガ存在シ且ツ k ハ k_0 ニ関スル有限次ノ拡大体 $k_1<k_2<\cdots\cdots\cdots\cdots<k_j<\cdots\cdots\cdots$ ノ併合体（Vereinigungskörper）

トシテ定義サレテヰル（拙著 *Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades.* 北大．理学部紀要三巻（1935））等デアル。

次ニ k（*relativ perfekten Körper*）ヲ基礎体ニ有スル有限階ノ多元体 D ヲトル。今，D ノ k ニ関スル階数ヲ n トスル。

D ニ対シテ次ノ三性質ヲ有スル函数 Φ ガ与ヘラレテ居レバ、D ヲ“賦値付ケラレテ居ル”ト云ヒ Φ ヲ D ノ賦値ト云フ。

1. $\alpha \in D$ ニ対シテ $\Phi(\alpha)$ ハ α ニ依ッテ一意的ニ定マル實数

   $\Phi(0)=\infty$，且ツ又適當ナ D ノ元 α ニ對シテハ

   $\Phi(\alpha)\neq 0$ トナル。

2. $\Phi(\alpha\beta)\Phi(\alpha)+\Phi(\beta)=\Phi(\beta\alpha)$

3. $\Phi(\alpha+\beta)\geqq Min(\Phi(\alpha), \Phi(\beta))$

以上ノ三ツノ條件ヨリ

i) $\Phi(1)=\Phi(-1)=0$

ii) $\Phi(\alpha+\beta)=Min.(\Phi(\alpha), \Phi(\beta))$

特ニ k ノ任意ノ元 a ニ對シテ

$\Phi(a)=\varphi(a)$ ナラバ

Φ ヲ φ ノ接續ト呼ブコトニスル。

§1. D ノ賦値 Φ ガ φ ノ接續ナルトキ Φ ハ φ ニ依テ如何様ニ定メラレルカ？

D ノ任意ノ元ヲ α トスルトキ，α ハ k ノ元ヲ係数ニ有ス

ル次ノ様ナkノ既約方程式ノ根ニナル。

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m=0$$

[$f(x)$ハαニ依テ一意的ニ定マル]

依ッテ D ハ $k(\alpha)$ ナル k ニ関シテ m 次ノ代数体ヲ含ム.

サテ Φ ハコノ場合 $k(\alpha)$ ニ於ケル φ ノ接続賦値トナルカラ明ラカニ

$$\Phi(\alpha)=\frac{1}{m}\varphi(a_m)$$

デアラウ。(II及ビIIIニ依ル)．サテ今，αノ k ニ関スル正規表現ヲ A トスレバ α ノ指標方程式 (*characteristische Gleichung*)

$|xE-A|=F(x)=0$ ハ n 次ノ方程式デ且ツヨク知ラレテ居ル如ク

$$F(x)=|f(x)|^{\frac{n}{m}}$$

依テ明ラカニ　$a_m^{\frac{n}{m}}=(-1)^n|A|$

即チ　$\Phi(\alpha)=\frac{1}{m}\varphi(a_n)=\frac{1}{n}\varphi(|A|)$.

今簡単ニ $|A|$ ヲ α ノ Norm ト呼ブコトニスル: $|A|=N(\alpha)$

サテ k ノ有スル性質カラシテ $k(\alpha)$ ニ於ケル φ ノ接続ハ唯一ツデアルカラ

$\Phi(\alpha)=\frac{N(\alpha)}{n}$ ガDニ於ケル唯一ツノφノ接続デアル。

§2. Dニkノ賦値φノ接続ヲ與ヘルコト。

D ノ任意ノ元 α ノ Norm ヲ $|A|$ トスルトキ

$$\Phi(\alpha)=\frac{1}{n}\varphi(|A|)$$

ト定義スル、コノ様ニシテ定メラレタΦガ実際ニ D ノ賦値

トナルコトヲ示サウ。

1. $\Phi(\alpha)$ ハ定義ニヨリ明ラカニ α ニ依ッテ一意的ニ定マル實數。

尚 $a \in k$ ナルトキハ $|A| = a^n$ 依ッテ

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{n}\varphi(a^n) = \varphi(a)$$

特ニ $a=0$ ナラバ $\Phi(0)=\infty$, 又 k ノ適當ナ元 a ニ對シテ

$$\Phi(a) = \varphi(a) \neq 0$$

ナラシムルコトが出來ル。

2. $\alpha, \beta \in D$ トスルトキ $|A|, |B|$ が夫々 α, β ノ Norm ナラバ

$\alpha\beta$ ノ Norm ハ明ラカニ $|A|\cdot|B|$ 依ッテ

$$\Phi(\alpha\beta) = \frac{1}{n}\varphi(|A|\,|B|) = \frac{1}{n}\varphi(|A|) + \frac{1}{n}\varphi(|B|) = \Phi(\alpha) + \Phi(\beta)$$

3. $\Phi(\alpha+\beta) \geqq Min(\Phi(\alpha), \Phi(\beta))$.

ソレニハ今、$\Phi(\alpha) \geqq \Phi(\beta)$ ($\Phi(\beta) > \Phi(\alpha)$ ノトキモ同樣) トスレバ

$$(\alpha\beta^{-1}+1)\beta = \alpha+\beta$$

且ツ $\Phi(\alpha\beta^{-1}) \geqq 0$

$\alpha\beta^{-1}$ ノ満足スル k ニ於ケル既約方程式ヲ $f(x) = x^m + a_1 x^{(m-1)} + \cdots\cdots + a_m$ トスルト $\alpha\beta^{-1}$ ノ Norm ハ $(-1)^n a_m^{\frac{n}{m}} = |AB^{-1}|$ デアルカラ

$\Phi(\alpha\beta^{-1}) = \frac{1}{n}\varphi(|AB^{-1}|) \geqq 0$ ヨリ $\varphi(a_m) \geqq 0$ トナラナクテハナラヌ。

且又、$\varphi(1) = 0$ デアルカラ

Ⅰ ニ依ッテ

$$a_1, \cdots\cdots, a_{m-1}$$

ハ悉クkノ整元デナケレバナラナイ。

サテ今、$y=1+x$ トシテ、$f(x)$ ニ代入スルト

$$f(y-1)=y^m+\cdots\cdots+(a_m-a_{m-1}+\cdots\cdots+(-1)^m 1)$$

トナリ、$\Phi(1+\alpha\beta^{-1})=\frac{1}{n}\varphi(a_m-a_{m-1}+\cdots\cdots+(-1)^m)\geqq 0$

($a_m, \cdots\cdots, (-1)^m$ ハ悉クkノ整元ナル故) 依ッテ

$$\Phi(\alpha+\beta)=\Phi(\alpha\beta^{-1}+1)+\Phi(\beta)\geqq\Phi(\beta)$$

即チ　$\Phi(\alpha+\beta)\geqq Min(\Phi(\alpha), \Phi(\beta))$

既ニ証明セラレタ如ク Φ ハ φ ノ接続デアル。

依ッテ次ノ事実ガ証明セラレタ。

kヲ賦値φニ関スル relativ perfekter Körper

D. kヲ基礎体ニ有スルn階ノ多元体 $\alpha\in D$ ノ kニ於ケル正規表現ヲAトスル

Dニハ常ニ唯一ツノkノ賦値ノ接続ガ存在シ、ソレハ

$$\Phi(\alpha)=\frac{1}{n}\varphi(|A|)$$

デ求メラレル。

§3. Derivierte Divisionsalgebren

基礎体k(relativ perfekter Körper)ニ関シテn階ノ多元体Dハ上記ノ議論デkノ接続賦値Φヲ有スルコトヲ知ッタ、ソコデ今度ハコノ賦値Φニ関シテDノ中デ収斂トカ、基本列トカイフ概念ヲ定義ショウト思フ。

1. $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n\cdots\cdots$ ヲDノ元ヨリナル元列トスルト

之レニ對シテDノ適當ナ元αニ對シテ

$$\varphi(\alpha-\alpha_n)$$

ガnト共ニ如何程デモ大キクナルトキハ其ノ元列ガαニ收斂スルト云フ。

2. $\alpha_1, \text{------} \alpha_n, \text{------}$ヲDノ元列トスル。

今Nヲ大キクトレバ$m_1>m_n>N$ナル指數ニ對シテ

$$\varphi(\alpha_{m_1}-\alpha_{m_2})$$

ガ又如何程デモ大キクナリ得ルトキ

$\alpha_1, \text{--------}, \alpha_n, \text{--------}$ヲDノ基本列ト云フ。

收斂スルDノ元列ハ基本列デアル。（逆ハ必ズシモ成立シナイ）

コレカラ先ハ可換体ニ於ケルト同樣ニシテ

Dノスベテノ基本列ガ極限元ヲ有スル樣ナDヲ含ム多元体D^*ヲツクルコトガ出來ル。

又D^*ニ於テハDノ賦値φ^*ノ接續ガ存在シD^*ハφ^*ニ關シテ完全デアル。

即チD^*ノ如何ナル基本列モD^*ニ於テ極限元ヲ有スル。

サテ、コノ樣ナDヲ含ム完全多元体ノ中デ最小ナモノ（同型ナルモノハ同一ナモノト見ナシテ）ガ存在スルガ、之レヲDノ *derivierte Divisions algebra* トイヒ$\overline{D}$ヲ以テアラハス。

次号ニハ基礎体kガφニ関シテ特ニ *perfekt* ナラバD

ガドウナルカト云フコトヲ攻究シテ見ヨウト思フ。