415. 數學雜話

松村　宗　治（台北大）

(I) 二球或ハ二円ヲ $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ トオキ

(1) $\quad r = \dfrac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}$

ヲ考ヘル、ソシテ r ヲ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ノ相對的距離ト名ヅケル、コノ名ハ適當デナイガ相對微分幾何ニナラッテシカ名ヅケ亦 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ハ円デアルトスル、球ノ場合モ同様デアル。

(1)ヨリ

$$(2)\qquad r=\frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})} \qquad \text{又ハ} \qquad r=\frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})}{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}$$

デアルカラ、$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ナル二円ガ互ニ垂直ナラバ $r=\infty$ 或ハ $r=0$ デアル。 r ノ値ガ 0 ト ∞ ノ間ノ値ヲトレバ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ハ垂直デナイ角デ交ハルノデアル。

(II) ξ 円ニ關スル $\mathfrak{x}$ 円或ハ $\mathfrak{y}$ 円ノ反円ノ比ヲ r トオキ之レヲ假リニ反円距離ト名ヅケルト

$$r=\frac{2(\mathfrak{x}\xi)\xi-\mathfrak{x}}{2(\mathfrak{y}\xi)\xi-\mathfrak{y}}.$$

之レヨリ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ガ垂直ナル場合ニハ

$$r=1-\frac{1}{2(\mathfrak{y}\xi)(\mathfrak{x}\xi)}$$

トナル。

$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ハ共ニ ξ ト $\dfrac{\pi}{4}$ ナル角ヲナセバ

$$r=0$$

トナル。

又 ξ ガ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ト共ニ垂直ニ交ハレバ

$$r=-\infty$$

トナル。

又 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ハ ξ ニ相接スレバ

$$\mathfrak{r}=\frac{1}{2}$$

トナル。

(III) 次ニ円群ノ比ヲ考ヘ

$$\mathfrak{r}=\frac{\alpha\xi+\beta\xi}{\gamma\mathfrak{z}+\delta\eta}$$

ヲ考ヘル。$\xi, \eta, \mathfrak{z}$ ハ円; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ skalar Grössen デアル。

サテ

$$\mathfrak{r}=\frac{\alpha(\xi\mathfrak{z})+\beta(\eta\mathfrak{z})}{\gamma(\mathfrak{z}\mathfrak{z})+\delta(\eta\mathfrak{z})}$$

トナルカラ円 $\mathfrak{z}$ ガ円 η ニ垂直ナラバ

$$\mathfrak{r}=\frac{\alpha}{\gamma}\cos\phi$$

トナル、但シ ϕ ハ $\xi, \mathfrak{z}$ ナル二円ノ間ノ角デアル、其ノ他ノ場合モ同様ニ考ヘラレル。

(IV) 尚以上ヲ組合セテ

$$\mathfrak{r}=\frac{2(\mathfrak{z}\xi)\xi-\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}},$$

$$\mathfrak{r}=\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\mathfrak{y}}.$$

等ヲモ考ヘラレル。

(V) G. Scheffers ガ Math. Annalen 60, S. 526 デ考ヘテイル äquilongen Transformation ヲ考ヘ変換後ノ曲線ノ元ノ曲線ニ對スル相對微分幾何ヲ考ヘル

ナラバ

$$\gamma = \varphi' + \frac{\chi(u)}{v}$$

ガ成リ立ツ。コヽニ γ ハ相對的距離デアリ、其ノ他ノ記號ハ、Scheffers ノ上記論文ニ於ケルソレヲ用ヒタ。

此ノ相對微分幾何ニ於ケル其ノ他ノ公式モ求メラレル何トナレバ

$$\bar{u} = \varphi(u), \quad \bar{v} = \varphi' v + \chi(u),$$

$$\bar{v}' = \frac{\chi'}{\varphi'} + \frac{\varphi''}{\varphi'} v + v'$$

ガ成立スルカラデアル。

(VI) 平面上ニ点 P_0, P_1, P_2, ------- ガ與ヘラレ、ソレヲ或ル円ニ関シテ反轉シテ P_0', P_1', P_2', ------- ヲ得タトスル、而シテ $P_i P_j$ ノ距離ヲ λ_{12} トスレバ、λ_{12} ハ相對幾何デハ $\sqrt{g_1 g_2}\,\lambda_{12}$ トナル。サテ λ_{12} ハ反轉デ

$$(1) \qquad K\lambda'_{12} \big/ \lambda'_{01}\lambda'_{02}$$

トナルカラ相對幾何デハ (1) ハ下ノ様ニナル。

$$(2) \qquad \frac{K\lambda'_{12}\sqrt{g_1' g_2'}}{\sqrt{g_0' g_1' g_0' g_2'}\ \lambda'_{01}\lambda'_{02}}$$

トナル、コヽニ K ハ常数デアル。

此ノヤウニシテ Richeson ノ論文 (American Journ of Math. LII, p. 425 ニ於ケル論文) ヲ相對幾何學的ニ論及スルコトガ出來ル。

(VII) A-surface ノ相對的距離ヲ求メルニハ前ニモ述ベシ如ク

$$(1)\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

ノ根ヲ求ムルヲ要ス。

サテ今、$\dfrac{\partial^2 \log(\sin \omega . \cos \omega)}{\partial u \partial v} = 0$ ナル場合、ツマリ

$$(2)\quad \sin 2\omega = U + V$$

ナル場合ヲ考ヘル、但シ U ハ u ノミノ函數，V ハ v ノミノ函數デアル、此ノ場合ニハ

$$(3)\quad \frac{\partial x'}{\partial u} = h \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = -h \frac{\partial x}{\partial v}$$

トオケバ

$$(4)\quad \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v} = 0,$$

$$(5)\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

デアル。但シ $2h = \varphi$ デアリ亦 h ハ u, v ノ函数デアル。

此ノコトハ Eisenhart: Transformations of surfaces, p. 8 ヲ參照セバ分ル。

デアルカラ (4) 即チ (5) ガ解ケレバ (3) ヨリ A-surface ノ相對的距離ヲ求メルコトガ出來ル。

(VIII). 吾々ハ

$$(1)\quad \theta_{uv} + a\,\theta_u + b\,\theta_v = 0$$

ナル微分方程式ヲイツモノヤウニ考ヘル。今 ξ, η ガ (1) ノ解デアリ

(2) $K_1 \mathfrak{z}^2 - K_2 \mathfrak{y}^2 = 0$

ナラバ如何。コヽニ K_i ハ常数デアル。

(2) カラ

$$(3)\quad \begin{cases} K_1 \mathfrak{z}\mathfrak{z}_u - K_2 \mathfrak{y}\mathfrak{y}_u = 0 \\ K_1 \mathfrak{z}\mathfrak{z}_v - K_2 \mathfrak{y}\mathfrak{y}_v = 0 \end{cases}$$

ヲ得。亦 (1) ヨリ

$$(4)\quad \begin{cases} K_1 \mathfrak{z}_{uv}\mathfrak{z} + a K_1 \mathfrak{z}_u \mathfrak{z} + b K_1 \mathfrak{z}_v \mathfrak{z} = 0, \\ K_2 \mathfrak{y}_{uv}\mathfrak{y} + a K_2 \mathfrak{y}_u \mathfrak{y} + b K_2 \mathfrak{y}_v \mathfrak{y} = 0. \end{cases}$$

(3), (4) ヨリ

$$(5)\quad K_1 \mathfrak{z}\mathfrak{z}_{uv} - K_2 \mathfrak{y}\mathfrak{y}_{uv} = 0$$

亦 (3) ヨリ

$$(6)\quad K_1 \mathfrak{z}\mathfrak{z}_{uv} + K_1 \mathfrak{z}_u \mathfrak{z}_v - K_2 \mathfrak{y}\mathfrak{y}_{uv} - K_2 \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v = 0.$$

ソコデ (5), (6) ヨリ

$$K_1 \mathfrak{z}_u \mathfrak{z}_v = K_2 \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v$$

ソコデ次ノコトガ言ヘル。

(2) ガ成立セバ表面 $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ 上ニソレゾレ曲線群ヲ求メ得テソレ等ガ各々ニ於テナス角ノ比ガ一定ナラシメ得ベシ。

以上ハ余ガ東北數誌第三十五巻, p. 339 ニテ述ベシ事柄ノ一ツノ一般化デアル。