413. Quasi-metric space ニ就テ II

角　谷　静　夫（阪大）

R^* ヲ metric space トシ R^* ノ二点 x, y ノ距離ガ $\rho(x, y)$ ニヨリ與ヘラレルモノトスル。今 R^* ノ閉集合 A, B ニ對シテ

i) $\overline{AB} = \underset{a \in A,\ b \in B}{\text{upper bound}}\ \rho(a, b)$

ii) $\overrightarrow{AB} = \underset{b \in B}{\text{upper bound}} \left\{ \underset{a \in A}{\text{lower bound}}\ \rho(a, b) \right\}$

iii) $\underline{AB} = \underset{a \in A,\ b \in B}{\text{lower bound}}\ \rho(a, b)$

トオケバ、コレ等ハ次ノ関係ヲ満足スル。

1° $\overline{AB} \geqq \overrightarrow{AB} \geqq \underline{AB}$, $\overrightarrow{AA} = \underline{AA} = 0$

2° $\overline{AB} + \overrightarrow{BC} \geqq \overline{AC}$

3° $\underline{AB} + \overline{BC} \geqq \overrightarrow{AC}$

4° $\overrightarrow{AB} + \underline{BC} \geqq \underline{AC}$

5° $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \geqq \overrightarrow{AC}$

1°ハ定義ヨリ明カデアリ、2°, 3°, 4°, 5°ハ $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ ニ對シテ常ニ成立スル關係

$$\rho(a, b) + \rho(b, c) \geqq \rho(a, c)$$

ヨリ容易ニ導クコトが出來ル。

R^* ニ於ケル開集合ヲ element トスル空間 R ヲ考ヘレバ R ノ element A, B ニハ i), ii), iii) ニヨツテ、$\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\underline{AB}$ ノ四種ノ距離が與ヘラレル。定義ヨリ $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\underline{AB} = \underline{BA}$ ナルコトハ明カデアルが $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ ハ必ズシモ成立シナイ。Wilson ハ $\overrightarrow{AB}$ ノ如ク symmetric デナイ距離ニテ 5° ヲ滿足スルモノヲ quasi-metrics ト名付ケコノヤウナ距離がツケラレタ空間ヲ quasi-metric space ト呼ンダ。

第87号385ニ於イテハ quasi-metric space R ハ、R^* ヲ適當ニトレバ R^* ニ於ケル開集合ヲ element トスル空間ニ ii) ニヨツテ quasi-metric ヲツケタモノニ iso-quasi-metric ニナルコトヲ示シタ。

今回ハ、更ニ一般ニ、空間 R ニ於イテソノ二点 A, B ニ對シテ $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, $\underline{AB} = \underline{BA}$ が 1°, 2°, 3°, 4°, 5° ヲ滿足スル如ク與ヘラレレバ、R ハ R^* ヲ適當ニ取レバ R^* ニ於ケル開集合ヲ element トスル空間ニ i), ii), iii) ノ意味デ「距離」ヲツケタモノニ「iso-metric」ニナルコ

トヲ示サウ。

証明： 先ヅ與ヘラレタ $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\underline{AB}$ ガ何レモ一様ニ有界ナル場合ヲ考ヘル。

R_1, R_2 ヲ共ニ R ト合同ナ空間トシ空間 R_1+R_2 (R_1, R_2 ニハ共通点ハナイモノトスル) ニテ定義サレタ実数値ノ一價函数ノ空間 R^* ヲ考ヘ、ソノ二ツノ element $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ニ對シテ距離 $d(\varphi_1, \varphi_2)$ ヲ

$$d(\varphi_1,\varphi_2)=\underset{X\in R_1+R_2}{\text{upper bound}}\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|.$$

トオク。 $d(\varphi_1, \varphi_2)$ ガ有限ナル如キモノノミヲ考ヘルコトニスレバ R^* ハ明カニ metric space デアル。

R^* ニ於ケル集合 F_A ヲ $X\in R_1$ ニ於テハ

$$\overrightarrow{AX} \leqq \varphi(X) \leqq \overline{AX} \qquad (1)$$

$X\in R_2$ ニ於テハ

$$\underline{XA} \leqq \varphi(X) \leqq \overrightarrow{XA} \qquad (2)$$

ヲ満足スル函數 $\varphi(X)$ 全体ノ集合トスル。F_A ガ R^* ニ於イテ閉集合デアルカラ、此ノ如ク定義サレタ F_A, F_B ニ對シテ

I $\overline{AB}=\overline{F_AF_B}\equiv\underset{\varphi_A\in F_A,\ \varphi_B\in F_B}{\text{upper bound}}\ d(\varphi_A,\varphi_B)$

II $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{F_AF_B}\equiv\underset{\varphi_B\in F_B}{\text{upper bound}}\left\{\underset{\varphi_A\in F_A}{\text{lower bound}}\ d(\varphi_A,\varphi_B)\right\}$

III $\underline{AB}=\underline{F_AF_B}\equiv\underset{\varphi_A\in F_A,\ \varphi_B\in F_B}{\text{lower bound}}\ d(\varphi_A,\varphi_B)$

トナルコトヲ証明スレバヨイ。

I ノ証明

I_1, $\overline{F_AF_B} \leqq \overline{AB}$ ナルコト。

任意ノ $\varphi_A \in F_A$, $\varphi_B \in F_B$ ニ對シテ $X \in R_1$ ナルトキハ (1) ヨリ

$$\varphi_A(X) - \varphi_B(X) \leqq \overline{AX} - \overrightarrow{BX} \leqq \overline{AB} \qquad (by\ 2°)$$

$$\varphi_B(X) - \varphi_A(X) \leqq \overline{BX} - \overrightarrow{AX} \leqq \overline{BA} = \overline{AB} \qquad (by\ 2°)$$

デアリ、$X \in R_2$ ナルトキハ (2) ヨリ

$$\varphi_A(X) - \varphi_B(X) \leqq \overrightarrow{XA} - \underline{XB} \leqq \overline{BA} = \overline{AB} \qquad (by\ 3°)$$

$$\varphi_B(X) - \varphi_A(X) \leqq \overrightarrow{XB} - \underline{XA} \leqq \overline{AB} \qquad (by\ 3°)$$

デアルカラ $X \in R_1 + R_2$ ナルトキ常ニ

$$|\varphi_A(X) - \varphi_B(X)| \leqq \overline{AB}$$

ガ成立スル。即チ、$d(\varphi_A, \varphi_B) \leqq \overline{AB}$. φ_A, φ_B ハ夫々 F_A, F_B ノ任意ノ函数デアツタカラ $\overline{F_AF_B} \leqq \overline{AB}$.

I_2. $\overline{F_AF_B} \geqq \overline{AB}$ ナルコト。

R_1 ノ点 A ニ於イテ考ヘレバ F_A ハ $X=A$ ニ於テ $\overrightarrow{AA}=0$ トナル函数 $\varphi_A^{\circ}(X)$ ヲ含ミ F_B ハ $X=A$ ニ於テ $\overline{AB}$ トナル函数 $\varphi_B^{\circ}(X)$ ヲ含ム。コノ $\varphi_A^{\circ}(X)$, $\varphi_B^{\circ}(X)$ ニ對シテハ

$$d(\varphi_A^{\circ}, \varphi_B^{\circ}) \geqq |\varphi_A^{\circ}(A) - \varphi_B^{\circ}(A)| = \overline{AB}$$

デアルカラ $\overline{F_AF_B} \geqq \overline{AB}$。

II ノ証明

II₁. $\underline{\overrightarrow{\mathbb{F}_A\mathbb{F}_B} \leqq \overrightarrow{AB}}$ ナルコト。

コレヲ示スニハ φ_B ヲ $\mathbb{F}_B$ ニ属スル任意ノ函數トスルトキ、コレニ對シテ適當ニ $\varphi_A^0 \in \mathbb{F}_A$ ヲ定メテ

$$d(\varphi_A^0, \varphi_B) \leqq \overrightarrow{AB} \tag{3}$$

ナル如クスルコトが出來ルコトヲ示セバヨイ。コノタメニハ各々ノ X_0 ニ對シテ

$$|\varphi_A^0(X_0) - \varphi_B(X_0)| \leqq \overrightarrow{AB} \tag{4}$$

ヲ満足スル $\varphi_A^0(X)$ ヲ作レバヨイ。

(a) $X_0 \in R_1$ ナル場合。コノトキハ $\varphi_B \in \mathbb{F}_B$ ナル假定ヨリ

$$\overrightarrow{BX_0} \leqq \varphi_B(X_0) \leqq \overline{BX_0}$$

デアル。

(a-1) $\varphi_B(X_0) > \overline{AX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overline{AX_0}$ トオク。スルト

$$0 < \varphi_B(X_0) - \varphi_A^0(X_0) \leqq \overline{BX_0} - \overline{AX_0} \leqq \overrightarrow{AB} \qquad (by\ 2^\circ)$$

(a-2) $\overrightarrow{AX_0} \leqq \varphi_B(X_0) \leqq \overline{AX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \varphi_B(X_0)$ トオク。

(a-3) $\varphi_B(X_0) < \overrightarrow{AX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{AX_0}$ トオク。スルト

$$0 < \varphi_A^0(X_0) - \varphi_B(X_0) \leqq \overrightarrow{AX_0} - \overrightarrow{BX_0} \leqq \overrightarrow{AB} \qquad (by\ 5^\circ)$$

(b) $X_0 \in R_2$ ナル場合。コノトキハ $\varphi_B \in \mathbb{F}_B$ ナル假定ヨリ

$$\underline{X_0B} \leqq \varphi_B(X_0) \leqq \overrightarrow{X_0B}$$

デアル。

(b-1) $\varphi_B(X_0) > \overrightarrow{X_0A}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{X_0A}$ トオク。スルト

$$0 < \varphi_B(X_0) - \varphi_A^0(X_0) \leqq \overrightarrow{X_0B} - \overrightarrow{X_0A} \leqq \overrightarrow{AB} \qquad (\text{by } 5°)$$

(b-2) $\underline{X_0A} \leqq \varphi_B(X_0) \leqq \overrightarrow{X_0A}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \varphi_B(X_0)$ トオク。

(b-3) $\varphi_B(X_0) < \underline{X_0A}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \underline{X_0A}$ トオク。スルト

$$0 < \varphi_A^0(X_0) - \varphi_B(X_0) \leqq \underline{X_0A} - \underline{X_0B} \leqq \overrightarrow{AB} \qquad (\text{by } 4°)$$

此ノ如ク各ノ X_0 ニ對シテ $\varphi_A^0(X_0)$ ヲ定義スレバ、コノ $\varphi_A^0(X)$ ニ對シテ (4) シタガッテ (3) ガ成立スル。

$\varphi_B(X)$ ハ F_B ノ任意ノ函數デアッタカラ $\overrightarrow{F_AF_B} \leqq \overrightarrow{AB}$ ヲ得ル。

II_2 $\underline{\overrightarrow{F_AF_B} \geqq \overrightarrow{AB}}$ ナルコト。

R_2 ノ点 A ニ於イテ考ヘレバ F_B ハ $X=A$ ニ於テ $\overrightarrow{AB}$ トナル函數 $\varphi_B^0(X)$ ヲ含ムガ F_A ニ属スル函數ハ何レモ $X = A \in R_2$ ニ於テ $\overrightarrow{AA} = \underline{AA} = 0$ デアルカラ、コノ $\varphi_B^0(X)$ ニ對シテハ任意ノ $\varphi_A \in F_A$ ニ對シテ

$$d(\varphi_A, \varphi_B^0) \geqq |\varphi_A(A) - \varphi_B^0(A)| = \overrightarrow{AB}$$

デアル。即チ

$$\underset{\varphi_A \in F_A}{\text{lower bound}}\ d(\varphi_A, \varphi_B^0) \geqq \overrightarrow{AB}$$

依ッテ勿論

$$\overrightarrow{F_A\,F_B} \geqq \overrightarrow{AB}$$

III. 1 証明

III_1. $\underline{\mathbb{F}_A\mathbb{F}_B \leqq AB}$ ナルコト。

コノタメニハ適当ニ $\varphi_A^0 \in \mathbb{F}_A$, $\varphi_B^0 \in \mathbb{F}_B$ ヲ取ッテ之レガスベテノ $X_0 \in R_1 + R_2$ ニ対シテ

$$\left|\varphi_A^0(X_0) - \varphi_B^0(X_0)\right| \leqq \underline{AB} \tag{5}$$

ヲ満足スルヤウニスルコトが出来ルコトヲ示セバヨイ。

(a) $X_0 \in R_1$ ナルトキ

(a-1) $\overrightarrow{AX_0} > \overline{BX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{AX_0}$, $\varphi_B^0(X_0) = \overline{BX_0}$ トオケバ

$$0 < \varphi_A^0(X_0) - \varphi_B^0(X_0) = \overrightarrow{AX_0} - \overline{BX_0} \leqq \underline{AB} \qquad (by\ 3^\circ)$$

(a-2) $\overrightarrow{AX_0} \leqq \overline{BX_0}$, $\overline{AX_0} \geqq \overrightarrow{BX_0}$ ナルトキハ $\overrightarrow{AX_0} \leqq \xi \leqq \overline{AX_0}$, $\overrightarrow{BX_0} \leqq \xi \leqq \overline{BX_0}$ ヲ同時ニ満足スル ξ が存在スルカラ $\varphi_A^0(X_0) = \varphi_B^0(X_0) = \xi$ トオケバヨイ。

(a-3) $\overline{AX_0} < \overrightarrow{BX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overline{AX_0}$, $\varphi_B^0(X_0) = \overrightarrow{BX_0}$ トオケバ

$$0 < \varphi_B^0(X_0) - \varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{BX_0} - \overline{AX_0} \leqq \underline{AB} \qquad (by\ 3^\circ)$$

(b) $X_0 \in R_2$ ナルトキ

(b-1) $\overrightarrow{X_0A} < \underline{X_0B}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{X_0A}$, $\varphi_B^0(X_0) = \underline{X_0B}$ トオケバ

$$0 < \varphi_B^0(X_0) - \varphi_A^0(X_0) = \underline{X_0B} - \overrightarrow{X_0A} \leqq \underline{AB} \qquad (by\ 4^\circ)$$

(b-2) $\overrightarrow{X_0A} \geqq \underline{X_0B}$, $\underline{X_0A} \leqq \overrightarrow{X_0B}$ ナルトキハ $\underline{X_0A} \leqq \xi \leqq \overrightarrow{X_0A}$, $\underline{X_0B} \leqq \xi \leqq \overrightarrow{X_0B}$ ヲ同時ニ満足スル ξ が存在スルカラ $\varphi_A^0(X_0) = \varphi_B^0(X_0) = \xi$ トオケバヨイ。

(a-3) $\underline{X_0A} > \overrightarrow{X_0B}$ ナルトキハ $\varphi_A^\circ(X_0) = \underline{X_0A}$, $\varphi_B^\circ(X_0) = \overrightarrow{X_0B}$ トオケバ

$$0 < \varphi_A^\circ(X_0) - \varphi_B^\circ(X_0) = \underline{X_0A} - \overrightarrow{X_0B} \leqq \underline{AB} \quad (by\ 4^\circ)$$

此ノ如ク $\varphi_A^\circ(X)$, $\varphi_B^\circ(X)$ ヲ定義スレバ之レハ明カニスベテノ $X_0 \in R_1 + R_2$ ニ對シテ (5) ヲ滿足スル。即チ

$$d(\varphi_A^\circ, \varphi_B^\circ) \leqq \underline{AB}$$

依ッテ

$$\underline{F_A F_B} \leqq \underline{AB}$$

III$_2$. $\underline{F_A F_B} \geqq \underline{AB}$ ナルコト。

R_2 ノ点 A ニ於イテ考ヘレバ F_A ニ属スル φ_A ハスベテ A ニテ $\overrightarrow{AA} = \underline{AA} = 0$ ナル値ヲ取ル。又シ F_B ニ属スル φ_B ノ取ル値ハ

$$\underline{AB} = \underline{BA} \leqq \varphi_B(A) \leqq \overrightarrow{BA}$$

デアル。故ニ、任意ノ $\varphi_A \in F_A$, $\varphi_B \in F_B$ ニ對シテ

$$d(\varphi_A, \varphi_B) \geqq |\varphi_A(A) - \varphi_B(A)| = |\varphi_B(A)| \geqq \underline{AB}$$

之レヨリ

$$\underline{F_A F_B} \geqq \underline{AB}$$

ヲ得.