411. Linear Operation ニ就イテ (IV)

泉　　信　一 (東北大)

北　川　敏　男 (阪　大)

――本論文ハ (I) ノ續キデアル。――

§5. 次ニ $\Lambda\{t, f(x)\}$ ヲ殆ンドスベテノ一定ノ t ニ對シテ $f(x)$ ニ關スル functional デ、且ツ t ニ關シテ measurable トスル、$\Lambda\{t, f(x)\}$ ノ domain E ガ殆ンドスベテノ t ニ關シテ Normalised デアルトシ、$f \in E$ ノ Norm ヲ

$$\|f(x)\|_t = \|f\|_t$$

デ表ハス、更ニ Λf ハ次ノ條件ヲ滿足スルトスル、乃テ

條件4°. 殆ンドスベテノ t ニ對シテ

$$|\Lambda\{t, f(x)\}| \leqq G\|f\|_t$$

トナルヤウナ $G \geqq 0$ ガ存在シテ、且ツ $\|f\|_t$ ハ t ニ關シテ integrable デアル。

從ツテ $\Lambda\{t, f(x)\}$ ハ殆ンドスベテノ t ニ對シテ、$f(x)$ ノ linear functional デ、且ツ $\Lambda\{t, f(x)\}$ ハ t ニ關シテ integrable デアル。

特ニ Λf ノ domain E ガ normalized space デ、且ツ contra-domain ガ (C) 又ハ (M) ナルトキニハ、任

意ノ $f \varepsilon E$ ニ對シテ $\|f\|_t = \|f\|$ トスレバ，條件4°ハ任意ノ linear operation ニヨッテ滿足サレル。又 $b-a \geqq 2$ トシ、E ガ (a,b) ニ於テ定義サレタ bounded meas. function ノ space デ，$f(x) \varepsilon E$ ナルトキ

$$\|f\|_t = \underset{t-1 \leqq x \leqq t+1}{\mathrm{l.u.b.}} |f(x)|$$

トシ，

$$\Lambda(f) = \Lambda\{t, f(x)\} = \int_{-1}^{1} f(x+t)\, d\varphi(t)$$

トスル、コヽニ $\varphi(t)$ ハ (a,b) ニ於テ bounded variation ノ function トスル．然ルトキ

$$G = \int_a^b |d\varphi(t)|$$

トシテ條件4°ガ滿足サレル。

又 E ガ (a,b) ニオケル integ. functions ノ作ル space デ，

$$\|f\|_t = \int_{-1}^{1} |f(x+t)|\, dx,$$

$$\Lambda\{t, f(x)\} = \int_{-1}^{1} f(x+t) K(x)\, dx$$

トオク、コヽニ $K(x)$ ハ (a,b) ニオケル bounded function トスル．然ルトキ條件4°ハ

$$G = \underset{a \leqq x \leqq b}{\mathrm{l.u.b.}} |K(x)|$$

トシテ滿足サレル． $E = L^p(a,b)$，$(p \geqq 1)$，$K(x) \varepsilon L^q(a,b)$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ トスル。 $\|f\|_t = \sqrt[p]{\int_{-1}^{1} |f(x+t)|^p dx}$

$$\Lambda\{t, f(x)\} = \int_{-1}^{1} f(x+t) K(x)\, dx$$

トスルトキ，條件4°ハ

$$G = \sqrt[q]{\int_a^b |K(x)|^q dx}$$

トシテ滿足サレル。

條件4°ヲ滿足スル *operation* Λ ニ關シテ次ノ定理ガ成立スル。

定理4. Λ ガ條件4°ヲ滿足スル *additive translatable op.* ナラバ，殆ンドスベテノ x ニ對シテ

$$\int_c^d \Lambda\{t, f(x+u)\} du = \Lambda\{t, \int_c^d f(x+u)\, du\} \qquad (6)$$

證明ハ定理3ト同樣ニ出來ル。

定理4ハ $E=(L^p)$ $(p \geqq 1)$, $E_1=(M)$ 又ハ (C) ノトキニハ F. *Riez* ノ定理カラ明カデアル。

§6. $\Lambda\{t, f(x)\}$ ガスベテノ t ニ對シテ有限デ，且ツ條件1°ヲ滿足スルトスル．Λf ガ *additive, translatable* ナルトキ

$$\begin{aligned}
\Lambda\{t, f(x)\} &= \lim_{h\to 0} \Lambda\{t, \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\, du\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\Lambda\{t, \int_a^{x+h} f(u)\, du\} - \Lambda\{t, \int_a^{x} f(u)\, du\}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\Lambda\{t+h, \int_a^{x} f(u)\, du\} - \Lambda\{t, \int_a^{x} f(u)\, du\}\right] \\
&= \frac{d}{dt}\Lambda\{t, \int_a^{x} f(u)\, du\}
\end{aligned}$$

今 $\Lambda\{t, f(x)\}$ ガ t ニ關シテ *integrable* トスルトキ，兩

辺ヲ積分シテ

$$\int_{c+t}^{d+t} \Lambda\{u, f(x)\}\,du = \int_{c+t}^{d+t} \frac{d}{du}\Lambda\left\{u. \int_a^x f(v)\,dv\right\}du$$

$$= \Lambda\left\{d+t, \int_a^x f(v)\,dv\right\} - \Lambda\left\{c+t, \int_a^x f(v)\,dv\right\}.$$

然ルニ Λ ノ translatable ナコトカラ

$$\int_{c+t}^{d+t} \Lambda\{u, f(x)\}\,du = \int_c^d \Lambda\{u+t, f(x)\}\,du$$

$$= \int_c^d \Lambda\{t, f(x+u)\}\,du.$$

又 Λ ノ additive デ translatable ナコトカラ

$$\Lambda\left\{d+t, \int_a^x f(v)\,dv\right\} - \Lambda\left\{c+t, \int_a^x f(v)\,dv\right\}$$

$$= \Lambda\left\{t, \int_a^{x+d} f(v)\,dv\right\} - \Lambda\left\{t, \int_a^{x+c} f(v)\,dv\right\}$$

$$= \Lambda\left\{t, \int_{x+c}^{x+d} f(v)\,dv\right\} = \Lambda\left\{t, \int_c^d f(x+u)\,du\right\}.$$

故ニ

$$\int_c^d \Lambda\{t, f(x+u)\}\,du = \Lambda\left\{t, \int_c^d f(x+u)\,du\right\} \qquad (6)$$

故ニ次ノ定理ヲウル。

定理5. Λ ガ條件 1° ヲ満足スル additive translatable op. ナラバ，常ニ(6)ガ成立スル。