407. 組合函數方程式ニ就イテ(I)

(混合体ノ函數方程式ノ解ニツイテ)

北川　敏　男(阪大)

§1.　X, Y ハ或ル集合 $\mathfrak{X}$ ノ任意ノ元, α ハ區間[0,1]

ニ屬スル任意ノ實數ナルトキ，$F(X, Y, \alpha)$ ハ又 $\mathfrak{M}$ ノ元ヲ表ハストスル。今茲ニ函數方程式

$$F(F(X,Y,\alpha), F(X,Y,\beta), \gamma) = F(X,Y, A(\alpha,\beta,\gamma)) \quad \text{------- (1)}$$

ガ F ノ定義域ニ於テ成立シタトスル。F ニ關シテ次ノ條件ガ充サレテヰルトスル。

(II) $\mathfrak{M}$ カラ任意ノ二ツノ元 X°, Y° ヲトルトキ $F(X^{\circ}, Y^{\circ}, \alpha)$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ ニ對シテ次ノ如キ一對一ノ Abbildung σ ガ存在スル，即チ

$$\sigma\{F(X^{\circ}, Y^{\circ}, \alpha)\} = \alpha \quad \text{------- (2)}$$

(III) 任意ノ X, Y ニ對シテ

$$F(X, Y, 1) = X \quad \text{------- (3)}$$

$$F(X, Y, 0) = Y \quad \text{------- (4)}$$

又 $A(\alpha, \beta, \gamma)$ ニ關シテ次ノ假定ガ充タサレテヰルトスル。

(IV) (i) $Min(\alpha, \beta) \leqq \delta \leqq Max(\alpha, \beta)$ ナル如キ任意ノ數 δ ニ關シテ

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \delta \quad \text{------- (5)}$$

トナル如キ γ ハ一ツ而シテ唯一ツ存在スル。

(ii) $\alpha > \beta$ ナルトキニハ，$A(\alpha, \beta, \gamma)$ ハ γ ノ純單調增加函數デアリ

(iii) $\alpha < \beta$ ナルトキニハ，$A(\alpha, \beta, \gamma)$ ハ γ ノ純單調減少函數デアル。

(iv) 任意ノ α 及ビ γ ニ對シテ

$$A(\alpha, \alpha, \gamma) = \gamma \quad \text{------- (6)}$$

(v) $A(\alpha, \beta, \gamma)$ ハ各變數 α, β, γ ニ關シテ連續デ

アル。

K. Rother[1] ハ偏微分方程式ノ解ヲ利用スルコトニヨリ，

$$F(X,Y,\alpha)=\sigma^{-1}\{\sigma(X)\varphi(\alpha)+(1-\varphi(\alpha))\sigma(Y)\} \text{-------} (7)$$

トシテ表ハサレルト云フコトヲ証明シタ。以下ニ於イテハ，微分可能性ヲ仮定セズ，以上ノ條件(I)−(V)ニ加フルニ

(VI) Wiener Proportionalitätspostulate 任意ノ實數 m (但シ $0\leqq m\leqq 1$) ニ對シテ

$$mA(x,y,\alpha)=A(mx,my,\alpha) \text{------------} (8)$$

並ビニ

(VII) $A(0,1,\alpha)=1-\alpha,\ A(1,0,\alpha)=\alpha$ ---------- (9)

ナル二條件ヲ以テシテ

$$F(X,Y,\alpha)=\sigma^{-1}[\sigma(X)\alpha+\sigma(Y)(1-\alpha)] \text{--------} (10)$$

トナルコトヲ証明スル。[2]

---

(1) K. Rother: Über die Lösung einer Funktionsgleichung aus der Theorie der Mischkörper. Monats. d. Math. u. Phys. 40 (1933). 尚問題ノ函數方程式ニ關スル物理學上ノ文獻，例ヘバ Lichtenecker ノ研究等ハ，コノ論文ノ脚註ヲ參照。

(2) コノ函數方程式ハ本誌28号(85番)デ提出シタコトガアル。Rother ノ得タ結果ヲ，微分可能ノ假定ナシニ得ルコトガ目標デアルカラ，假定(VI)及ビ(VII) $A(0,1,\alpha)=1-\alpha$ ヲ最後ニナツテ役ニ立テル証明方針デ進ム。Lichtenecker ノ logarithmische Mischregel ヲ導クノニハ，(VI)，(VII) ノコトハ假定セネバナラヌコトヲ附言シテオク。

§2. $A(x, y, \alpha)$ ニ関スル函数方程式：今 $\mathfrak{M}$ ニ於イテ任意ニ X°, Y° ヲトリ，$F(X^\circ, Y^\circ, \alpha)$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ ノ全体ヲ $\mathfrak{M}(X^\circ, Y^\circ)$ デ示ス。$X, Y \in \mathfrak{M}(X^\circ, Y^\circ)$ ナリトシテ

$$B(x, y, \alpha) = \sigma\{F(\sigma(x), \sigma(y), \alpha)\} \quad \text{------------} (11)$$

但シ　$\sigma(X) = x, \quad \sigma(Y) = y$ ------------ (12)

トオク。

関係(11)ヲ用ヒ，(I)ヲ $B(x, y, \alpha)$ 並ビニ $A(\alpha, \beta, \gamma)$ ニツイテ書キカヘルトキ容易ニ

$$B(x, y, \alpha) = A(x, y, \alpha) \quad \text{------------} (13)$$

並ビニ

$$A(A(x, y, \alpha), A(x, y, \beta), \gamma) = A(x, y, A(\alpha, \beta, \gamma)) \quad \text{-----} (14)$$

ヲ得ル。依ツテ

$$A(x, y, \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha) y \quad \text{------------} (15)$$

ヲ証明スレバヨイ。又(III)カラ

$$A(x, y, 1) = x, \quad A(x, y, 0) = y \quad \text{------------} (16)$$

ヲ得ルコトヲ注意シテオク。

§3. 記号ノ導入並ビニ基本関係　記述ヲ簡明ニスルタメ

$$A(0, 1, \gamma) = \gamma' \quad \text{------------} (17)$$

$$A(x, y, \alpha) = \begin{pmatrix} x, & y \\ \alpha, & \alpha' \end{pmatrix} \quad \text{------------} (18)$$

ト置ク。α' ハ α ニヨリ一意ニ決定サレルモノデアルカラ右辺ニ α' ナル変数ヲ加ヘタコトガ差支ヘナイ。言フマデモ

ナク[1]

$$(\gamma')'=\gamma,\quad 1'=0,\quad 0'=1 \quad\text{-------------------}(19)$$

記法(18)ヲモツテ混合法則(I)ヲ書キ表ハセバ

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ \alpha & \alpha'\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}x & y\\ \beta & \beta'\end{pmatrix}\\ \gamma & \gamma'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \gamma'\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \gamma'\end{pmatrix}'\end{pmatrix}\text{------}(20)$$

特ニ, $x=0$, $y=1$ トオキテ

$$\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma & \gamma'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \gamma'\end{pmatrix}' \quad\text{-------------------------}(21)$$

(21)ヲ(20)ノ右辺ニ代入シテ

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ \alpha & \alpha'\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}x & y\\ \beta & \beta'\end{pmatrix}\\ \gamma & \gamma'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \gamma'\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma & \gamma'\end{pmatrix}\end{pmatrix}\text{------}(22)$$

茲ニ於イテ更ニ、次ノ二ツノ記号ヲ導入スル。

$$\begin{pmatrix}x & 0\\ \alpha & \alpha'\end{pmatrix}=x\circ\alpha \quad\text{-------------------------}(23)$$

$$\begin{pmatrix}0 & y\\ \alpha & \alpha'\end{pmatrix}=y\cdot\alpha' \quad\text{-------------------------}(24)$$

茲ニ便宜上次ノ概念ヲ導入スル;

定義(1)　(半群 Halbgruppe) 集合 $\mathfrak{G}$ ノ元ヲ a, b, c -------デ表ハストキ

1)　a, b ガ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ元ナルトキ, ab ナル $\mathfrak{G}$ ノ元ガ

---

(1)　假定(VII)カラ $\gamma'=1-\gamma$ トナルカラ $(\gamma')'=\gamma$ トナル。シカシ, コノ假定ナシデ $(\gamma')'=\gamma$ トナルコトヲ注意シタイ。

一意的ニ存在スル。

2) $(ab)c = a(bc)$

3) $ae = ea = a$ ナル如キ元 e ガ G ニ存在スル。

4) G ノ元ノ間ニ記号 $<$ (又ハ $>$) デ表ハサレル順序ナル関係ガ成立シ，次ノ法則ニ従フ。

a, b ガ G ノ元ナラバ，次ノ三ツノ場合ノウチ一ツ而シテ唯一ツノ場合ノミガオコル。

$$a > b \quad 又ハ \quad a = b \quad 又ハ \quad a < b$$

($a > b$ ノコトヲ $b < a$ トモカク)

5) $a \geqq b$ 且ツ $a > e$ ナラバ，又ソノトキニ限リ．$a = bx$ 或ハ $a = yb$ ナル如キ G ノ元 x 或ハ y ガ夫々一意的ニ存在スル。[1]

然ルトキ

補助定理 I. 区間 $(0, 1)$ ニ属スル實体ノ全体ハ，Composition $a \circ b$ 又ハ $a \cdot b$ ニツキ夫々半群ヲ形成スル。

証明：$a \circ b$ ニツイテ述ベル：實數トシテ $a \gtreqless b$ ナルニ従ヒ $a \lesseqgtr b$ ナル関係アリトスル。然ルトキ 4) ガ成立，1) ハ自明，2) ハ $y = \beta = 0$ トシテ ( ) カラ得ラレ，3) ニ於ケル e トシテ 1 ヲ採用，5) ハ假定 II) ヨリ得ラレ，カク

(1) 彌永氏：幾何學基礎論 (III) 129頁ニテ半体 (*Halbkörper*) ナル概念ガ導入サレテヰルノニ因ンデ假リニカク名ヅケタ。1)—5) ノ間ニ，重複シタ條件ガアルカモ知レナイガ今ソレヲ問題トシナイ。

シテ定理ガ成リ立ツ。

補助定理II. 任意ノ x, α, β 並ビニ γ ニ関シテ

$$\begin{pmatrix} x\circ\alpha & x\circ\beta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = x\circ\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \quad \text{------------} (25)$$

並ニ

$$\begin{pmatrix} x\cdot\alpha & x\cdot\beta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \quad \text{------------} (26)$$

証明: (22) ニ於イテ, $y=0$ トオケバ (25) ヲ得, 又 (22) ニ於イテ $x=0$ トオキテ且ツ α' ヲ α, β' ヲ β デ書キ改メルトキ (26) ヲ得ル。

系I. 任意ノ x, α, γ ニ對シテ

$$(x\circ\alpha)\cdot\gamma = x\circ(\alpha\cdot\gamma) \quad \text{------------} (27)$$

$$(x\cdot\alpha)\circ\gamma = x\cdot(\alpha\circ\gamma) \quad \text{------------} (28)$$

証明: 夫々 (25), (26) ニ於イテ $\beta=0$ トシテ得ラレル。

補助定理III. 任意ノ y, β ニ對シテ

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ \beta & \beta' \end{pmatrix} = (y'\cdot\beta')' \quad \text{------------} (29)$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} = (x'\circ\alpha)' \quad \text{------------} (30)$$

証明:
$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ \beta & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1' & y' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix}' \qquad ((21) \text{ ニ由ル})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & y' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix}' \qquad ((19) \text{ ヲ用ヰル})$$

$$= (y'\cdot\beta')' \qquad ((24) \text{ ニ依ル})$$

同様ニシテ (21), (19) 並ビニ (23) ニ由リ (30) ヲ得ル。

§4. 逆元ノ導入並ビニ基本関係ノ表示　實數ノ大小関係トシテ $x>0$, $x \geqq y$ ナルトキニハ，

$$y = x \circ \delta \qquad (31)$$

ナル如キ，區間 $[0, 1]$ ニ屬スル實數 δ が存在スル。今抽象的ニ x^{-1} ヲ導入シ，コレト $\mathcal{G}$ ノ元トノ間ニ

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 1 \qquad (32)$$

ナリトシ，順序関係ハ

$$x \gtreqless y \text{ ニ應ジテ夫々 } x^{-1} \lesseqgtr y^{-1} \qquad (33)$$

ナリトスレバ，(31) ニ於ケル δ ハ

$$\delta = x^{-1} \circ y \qquad (34)$$

デ與ヘラレル。

コノ記法ヲ用フルトキ，補助定理 II. (25) ニ依リ

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0' \end{pmatrix} \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \circ \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} & x \circ \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 0' \end{pmatrix} \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}$$

$$= x \circ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} & \delta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}$$

$$= x \circ \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix}^{-1} \circ \delta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}$$

他方ニ於イテ

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha' & 0' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \end{pmatrix} = x \circ \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha \circ \gamma & (\alpha \circ \gamma)' \end{pmatrix}$$

上ノ二ツノ Ausdruck ニ於イテ x ハ任意デアルカラ

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix}^{-1} \circ \delta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha\circ\gamma & (\alpha\circ\gamma)' \end{pmatrix} \quad \text{--------} (35)$$

§5. Topologie ノ導入並ニ半群ノ表示。

茲ニ到リ始メテ假定(V)ヲ用ヰテ，先ヅ次ノ結果ヲ得ル。

補助定理IV. 任意ノ $x, \alpha \in G$ ニ對シテ常ニ

$$x \circ \alpha = x \cdot \alpha \quad \text{--------------------------} (36)$$

而シテ，區間 $[0, 1]$ ヲソレ自身ニヤル Topologische Abbildung λ ガ存在シテ次ノ性質ヲモツ。

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & x \circ \alpha = \lambda^{-1}(\lambda(x)\lambda(\alpha)) \\ 2^\circ & \lambda(0) = 0, \ \lambda(1) = 1 \end{array}\right\} \quad \text{--------------------} (37)$$

證明： 假定(V)ニヨリ，Composition $x \circ \alpha$ ニ關スル半群 G ハ，區間 $[0, 1]$ ニ於ケル實數ノ Multiplikation ニ stetig isomorph ニナル。ソレ故

$$x \circ \alpha = \lambda^{-1}(\lambda(x)\lambda(\alpha))$$

トカゝレ、2° ヲモミタス。同様ニシテ

$$x \cdot \alpha = \mu^{-1}(\mu(x)\mu(\alpha)) \quad \text{--------------------} (38)$$

トナリ、$\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$ トナルヤウナ Topologische Abb. μ ガ存在スル。今

$$\lambda(\mu^{-1}(x)) = \rho(x) \quad \text{--------------------------} (39)$$

ナル Topologische Abb. ヲ導入スレバ，系Iニヨリ

$$\rho(x\alpha)\rho(\gamma) = \rho(x\rho^{-1}(\rho(\alpha)\rho(\gamma))) \quad \text{---------} (40)$$

ヲ得ル。右辺ハ α, γ ニ關シテ對稱ダカラ

$$\rho(x\alpha)\rho(\gamma)=\rho(x\gamma)\rho(\alpha) \cdots\cdots (41)$$

$\alpha=1$ トオイテ

$$\rho(x)\rho(\gamma)=\rho(x\gamma) \cdots\cdots (42)$$

$\rho(0)=0,\ \rho(1)=1$ トナル如キ連結解ハ

$$\rho(x)=x^k \cdots\cdots (43)$$

コレカラ (36) ヲ得ルノデアル。

補助定理 V. 今，補助定理 IV ニ於イテ導入シタ λ ヲ用ヰテ

$$A^*(x,y,\alpha)=\lambda A(\lambda^{-1}(x),\lambda^{-1}(y),\lambda^{-1}(\alpha)) \cdots\cdots (44)$$

ヲ導入スレバ，性質 (I)－(V) ノミナラズ，(VI) ヲモ満足スル。而シテ

$$A^*(0,1,\alpha)=1-h(\alpha) \cdots\cdots (45)$$

トオケバ，$h(0)=0,\ h(1)=1$ トナリ，純単調増加連続デアリ，$A^*(x,y,\alpha)$ ハコノ函数 $h(\alpha)$ ヲ用キルトキ次ノ如ク表ハサレル。

(i) $y\geqq x$ ナルトキニハ

$$A^*(x,y,\alpha)=yA^*\left(\frac{x}{y},1,\alpha\right)$$
$$=yh^{-1}\left[h\left(\frac{x}{y}\right)\alpha+1-\alpha\right] \cdots\cdots (46)$$

(ii) $y\leqq x$ ナルトキニハ

$$A^*(x,y,\alpha)=xA^*\left(1,\frac{y}{x},\alpha\right)$$
$$=xh^{-1}\left[h(\alpha)+h\left(\frac{y}{x}\right)-h(\alpha)h\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$
$$\cdots\cdots (47)$$

§6. 假定 (V), (VI) ノ導入並ニ証明ノ完了。

假定 (V) 及ビ (VI) $A(0,1,\alpha)=1-\alpha$ ハ今マデ全然使ッテ

ナカッタ。之レヲ設ケルト

$$\lambda(x)=x,\quad h(x)=x$$

ト、トッテヨイコトガ分ル。ソレ故ニ、(44), (46) カラ

$$A(x, y, \alpha)=xA\left(1, \frac{y}{x}, \alpha\right)$$
$$=x\alpha+(1-\alpha)y$$

ヲ得ル。コレデ証明ハ完了シタ。

後記： 假定(V), (VI) $A(0, 1, \alpha)=1-\alpha$ ガナケレバ，(46), (47) 並ビニ(I)ニヨリ、$h(x)$ニ関スル可成リ長イ函数方程式ヲ得ル。ソレハ，$h(x)$ニ関シテ一ツノ新シイ條件ヲ與ヘテヰルコトハ確カデアル。ガ、ソレヲ直接考究シテ $h(x)=x$ ヲ得ルコトハ，筆者ニハ出來ナカッタ。残サレタ問題ハ，即チ(35)ヲh函数デ表示シテ $h(x)=x$ ヲ導クノニアル。又 $h(1-h(x))=1-x$ トナルコトヲ注意シテオキタイ。