

404. Bolzano-Weierstrassノ定理 = 就イテ

中澤武雄(東京文理大)

1° “有界無限集合ハ少クトモーツノ集積点ヲ有ス”ト
言フ Bolzano-Weierstrassノ定理ガ一次元ノ場合 =
ハ今少シ條件ヲ弱クシテモ成立ツコトヲ証明シマス。

ordered set E = 於イテ点 x ノ近傍トハ x ヲ挟
ム任意二点ノ間 = アル点ノ集合ヲ指ス。又 E 内ノ部分集合 M
ガ有界デアルトハ M ヲ挟ム二点ガ存在スルコトヲ意味シ、
一点 x = 對シテ如何ナル $U(x) \cap M$ ノ点ヲ無限 = 多ク含
ムトキ x ヲ M ノ Häufungspunkt ト云フ。

然ラバ set E ガ

(i) ordered set デアリ

(ii) Schnittpunktガ少クトモーツ存在スル (ツマ
リニツアルトキヲモ許ス) トキハ

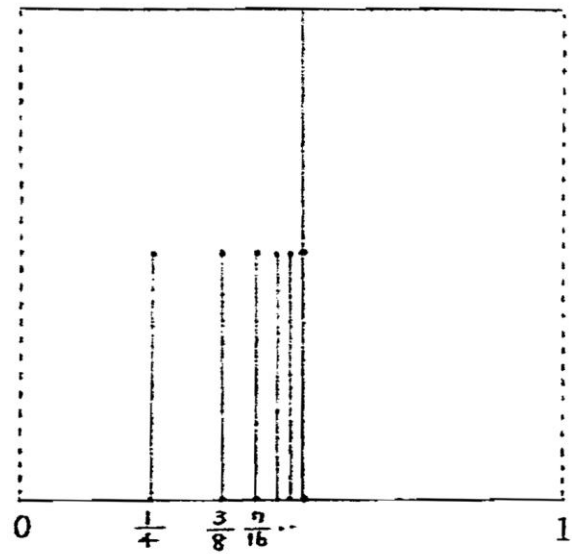
E 内 = 於テ Bolzano-Weierstrassノ定理ガ成立ス
ル。

証明: Schnittヲ作ル。即チ E ノ点 x = 對シテ x
ヨリ左 = M ノ点ガ高々有限個シカナイトキハ x ハ class I
= 入レル。然ラザルトキハ x ハ class II = 入レル。 M ハ
有界無限集合デアルカラ I, II トモ空 = ナラナイ。故カラ
Schnittガデキル。コノトキノ Schnittpunktハ唯一
ツデアル。ソレヲ x トスルト x ハ M ノ Häufungspunkt
= ナル。^{*}

— (証終) —

この証明 = 依って E が separabel と $stetig^{**}$ と
 云ふことが必要でありことが分る。

(1) 一 双ノ對邊ノ除カ
 と正方形 $\{x, y\}, 0 < x < 1,$
 $0 \leq y \leq 1$ ノ集合 $A =$ 於テ
 $x_1 < x_2$ か或ハ $x_1 = x_2,$
 $y_1 < y_2$ ナラ $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$
 トスルト A ハ ordered set
 ナ Schnitt punkt satz ナ
 ナリヌツ。



従って Bolzano-Weierstrass / 定理が成リ立ツ。例
 ハ

$$(a) \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right), \dots$$

$$(b) \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ハ 共 $= \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ナ Häufungspunkt $= \in \cup$ 。然モ集合 A
 ハ separabel ナハナシ。

(2) 順序数 ω_α ヨリ小ナル総テノ順序数ノ集合ヲ B ト
 スルト B ハ ordered set ナリ Schnittpunkt が少
 クトモ一ツ存在スルカラ Bolzano-Weierstrass / 定理が
 成リ立ツ。

(*) 始メ是ノ証明ノ二倍程ガツマノヲ掛谷先生 = 訂正シテ頂
 キマシタ。

(**) Dedekind / 意味ナ

コノ場合ハ $M =$ 最初ノ点ガ存在スルカラ, ソコカラ 順々
 = 右ヘ 数ヘテ行ケバ ω 番目 = ソノ *Häufungspunkt* = 到
 ル。其故コノ *Häufungspunkt* ハ ω ト共 終テ 極限 順序
 数デアル。 B ハ 明ラカ = *stetig* デハナイ。 ω_α フ 十分大
 ナクトレバ B ノ 濃度ハ 十分大トナレ。 *metrisch* デモナク
 ナル。

(3) 順序数 $\omega_\alpha =$ 對シテ ω_α 桁ノ 小数 $0.x_1x_2 \dots$
 ノ 集合 C フ 考ヘルト *ordered set* デ *Schnittpunkt*
 ガ 唯一ツデアレカラ *Bolzano-Weierstrass* ノ 定理ガナ
 リタツ。 ω_α フ 十分大 = トレバ C ノ 濃度ハ 十分大トナリ,
 又 *metrisierbar* デモナクナル。

2° 上ノ 証明ハ 又 ソツクリソノ マ、次ノ 定理 = 役立テ
 マス。

“有限 ω_α 集合ハ 少クモ 一ツ ω_α 集積点ヲ 有ス”