399. 或種ノ積分方程式ニツイテ（IV）

泉　信一（東北大）
北川敏男（阪大）

本論文ノ目的ハ前ニ、（I）－（III）デ考ヘタ積分方程式ヲモット廣イ附帶條件ノ下ニ解クコトデアル。

積分方程式

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,dg_k(t) \tag{1}$$

ヲ考ヘル．コヽ＝$g_k(t)$　（$k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$）ハ (a, b) ＝於イテ有界変分デアルトスル。附帯條件トシテ

$$f^{(k)}(x)=O(e^{g(x)})\quad(k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1) \tag{2}$$

テトル，コヽニ、$g(x)$ ハ $(-\infty, \infty)$ ＝テ定義サレタ偶函数デ $x\geqq 0$ ＝テ増加函数トスル。又簡単ノタメニ，$a=-1$，$b=1$ トスル。

（2）カラ

$$|f^{(k)}(x)|\leqq B_k e^{g(x)}\quad(k=0, 1, \cdots\cdots, n-1) \tag{3}$$

$x>2$ ノトキ

$$|f^{(n)}(x)|\leqq\sum_{k=0}^{n-1}B_k\int_{-1}^{1}e^{g(x+t)}|dg_k(t)|$$

$$\leqq\sum_{k=0}^{n-1}B_k e^{g(x+1)}\int_{-1}^{1}|dg_k(t)|$$

故＝　$\int_{-1}^{1}|dg_k(t)|=C_k$ トオクトキ　(4)

$$|f^{(n)}(x)|\leqq\left(\sum_{k=0}^{n-1}B_kC_k\right)e^{g(x+1)}$$

故＝

$$B_n=\sum_{k=0}^{n-1}B_kC_k \tag{5}$$

トオクトキ，$|f^{(n)}(x)|\leqq B_n e^{g(x+1)}$　(6)

然ル＝(1) ヲ満足スル $f(x)$ ハ何回デモ微分出来ル，

モシ

$$|f^{(n+\nu)}(x)| \leqq B_{n+\nu}\, e^{g(x+\nu+1)} \qquad (\nu=0,1,\cdots\cdots,m-1) \qquad (7)$$

トナル様ナ $B_{n+\nu}\,(\nu=0,1,\cdots\cdots,m-1)$ ガ定マッタトスレバ,

(1) カラ

$$f^{(m+n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-1}^{1} f^{(m+k)}(x+t)\,dg_k(t),$$

従ッテ (11) カラ

$$|f^{(m+n)}(x)| \leqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_{m+k}\, C_k\right) e^{g(x+m+1)}$$

故ニ $$B_{m+n}=\sum_{k=0}^{n-1} B_{m+k}\, C_k \qquad (8)$$

トオクトキ, (11) ハ $\nu=m$ ノトキ成立スル. 従ッテ一般ニ

$$|f^{n+\nu}(x)| \leqq B_{n+\nu}\, e^{g(x+\nu+1)} \qquad (\nu=0,1,2,\cdots\cdots) \qquad (10)$$

然ルニ. 方程式

$$X^n-\sum_{k=1}^{n-1} C_k X^k - C_0 X = 0 \qquad (11)$$

ノ最大ノ正根ヲ ξ トシ,

$$Max\left(\xi, B_0, B_1, \sqrt[2]{B_2}, \cdots\cdots, \sqrt[k]{B_k}, \cdots\cdots, \sqrt[n-1]{B_{n-1}}, \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n-1} B_k C_k}\right)=D \qquad (12)$$

トオクナラバ, 容易ニ分ル如ク

$$|f^{(n+\nu)}(x)| \leqq D^{n+\nu} e^{g(x+\nu+1)} \qquad (\nu=0,1,2,\cdots\cdots) \qquad (13)$$

ヲ得ルカラ, 従ッテ

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\, r^\nu \ll \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{D^\nu e^{g(x+\nu+1-n)}}{\nu!}\, r^\nu \qquad (14)$$

サテ、コノデ

$$\sqrt[\nu]{\frac{D^{\nu}e^{g(x+\nu-n+1)}}{\nu!}}=e^{\frac{g(x+\nu-n+1)}{\nu}-\log\nu+1+\log D}(1+o(1))$$

デアルカラ、(16) ノ右辺ガ收斂半徑ガ1ヨリ大ナルタメニ

ハ,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\frac{g(x+\nu-n+1)}{\nu}-\log\nu+1+\log D}\leqq\theta<1$$

即チ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\dfrac{g(x+\nu-n+1)}{\nu}-\log\nu+1+\log D\right\}<a<0$

トナレバヨイ。ソレニハ,

$$\frac{g(x)}{x}<\log x+A,\qquad for\ x\geqq x_0 \tag{15}$$

トナル様ナ x_0 及ビ $A<-\log De$ ガ存在スレバヨイ。

結局. $x>2$ ナルスベテノ x ニツキ, (16) ノ左辺ハ常ニ conv スル。 $x\leqq 2$ ノトキモ同様ナ議論ヲ進メウルコトハ容易ニワカル。

故ニ

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-1}^{1}f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(k+m)}(x)}{m!}t^m\right\}d\varphi_k(t)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}f^{(s)}(x)\sum_{\substack{m+k=s\\0\leqq k\leqq n-1}}\frac{1}{m!}\int_{-1}^{1}t^m\,d\varphi_k(t)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}a_s f^{(s)}(x),\quad say.$$

故ニ無限次ノ微分方程式

$$f^{(n)}(x)-\sum_{s=0}^{\infty}a_s f^{(s)}(x)=0 \tag{16}$$

ヲウル。(16) ノ generating function ノ order ハ 1 デ, maximal type ニハナラナイ (前論文, III 参照). 故ニ Valiron ノ定理カラ次ノ定理ヲウル。

定理 I. $f(x)$ ハ

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t), \quad (-\infty<x<\infty).$$

及ビ附帯條件

$$|f^{(k)}(x)|\leqq B_k e^{g(x)} \qquad (k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1) \quad (3)$$

ヲ満足スルモノトスル。コヽニ、$g(x)$ ハ $(-\infty,\infty)$ デ定義サレタ偶函数デ, $\geqq 0$ 且ツ x ノ増加函数デアリ、更ニ次ノ條件ヲ満足スルモノトスル: 乃チ

$$\frac{g(x)}{x}<\log x-A, \qquad for\ x\geqq x_0 \tag{17}$$

トナル様ナ $x_0>0$ 及ビ $A>\log D_e$ が存在スル。但シ, ココニ、常数 D ハ (11), (12) ニヨリ一意ニキマル正数デアルトスル。

然ルトキ, カヽル $f(x)$ が

$$f(x)=\sum p_k(x)\,e^{\lambda_k x} \tag{18}$$

ナル形ニカケルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハ右辺が abs. conv ナルコトデアル。

コヽニ λ_k ハ

$$\lambda^n-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\int_a^b e^{\lambda t}\,d\varphi_k(t)=0 \tag{19}$$

ノ根デ，$P_k(x)$ハソノ次数ハλ_kノ multiplicity μ_kヨリ小サナ多項式トスル。

但シ
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_{k+\mu_k}}=0 \tag{20}$$
トスル。

特ニ (19) ノ根ノ数ガ有限ナトキニハ，(3),(17) ヲ満足スル$f(x)$ハ常ニ (18) デ表ハスコトガ出来ル。

注意 1. 積分方程式
$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt \tag{21}$$
ヲ附帯條件
$$|f(x)|\leqq e^{g(x)} \tag{22}$$
ノモトデ解ク問題ニ於イテハ，
$$F(x)=\int_0^x f(s)\,ds \tag{23}$$
トオキ
$$F'(x)=\frac{1}{2}\{F(x+1)-F(x-1)\} \tag{24}$$
並ビニ
$$|F'(x)|=\left|\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt\right|\leqq\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}e^{g(t)}dt$$
$$\leqq e^{g(x+1)} \tag{25}$$
ヲ満足スルコトカラ、(1) ノ特別ノ場合トシテ論ゼラレル.

コノトキ、$n=1$, $B_0=1$, $C_0=1$, $D=1$ トトレバヨイ。

條件 (17) ハ明カニ満足サレテキル．

系．定理 1 ニ於イテ條件 (3) ノ常数 B_k ($k=0,1,2,\cdots,n-1$)

ガ與ヘラレズ，只、漠然ト條件(2)ガ與ヘラレタモノトスル、然ルトキ若シ(17)ノ代リニ

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left(\frac{g(x)}{x}-\log x\right)=-\infty \tag{26}$$

ガ與ヘラレルナラバ，定理Iノ結果ハソノマヽ成リ立ツ。

注意2. 前論文(I)−(II)デ論ジタモノデハ，

$$g(x)=|Cx| \tag{27}$$