397. 特殊ナガロア体ノ構成ニ就テ(I)

淡中忠郎(東北大)

「與ヘラレタ基礎体kノ上ニ與ヘラレタガロア群 G ヲモツ体ガアルカ」トイフヨク知ラレタ問題ヲ特殊ノ場合ニ考ヘテ見タイト思ヒマス。

Brauer (Crelle Bd. 168 1932) ガ最初ニコノ問題ヲ Ring ト関係付ケテカラ同ジ種類ノ論文ガ二三出テ居リマスガ、ココデ述ベタイノハ最近出タ Witt ノ論文 (Crelle Bd. 174 (1936)) ノ考ヘヲ使ッテ次ノ定理ヲ証明スルコトデス。

(定理) $k \ni e^{\frac{2\pi i}{p}}$ (pハ素数) デアレバ k ノ上ニ任意ノ p-Gruppe G ヲガロア群トスル体ガアル。」

勿論kハ代数々体トシマス。

§1. Witt ノ Konstruktion.

説明ノ都合上先ヅ上記ノ論文ニアル Witt ノ構成法ヲ述ベル。
Gヲp-Gruppe, G^*ヲG/G^*ガ$(p,p,\cdots\cdots,p)$ノ型ニナル最小ノ分群トスレバ$G^* \neq 1$ノ時ニハG^*トGノ Zentrum トノ Durchschnitt ノ中ニp次ノ群gガトレル、コノgノ單位表現デナイ Charakter ノ一ツヲχトスル。

群Gヲgヲ$G/g=\Gamma$デ erweitern シタモノト考ヘテソノ拡大ノ條件ヲ何時モノ様ニ

(1a) $u_\sigma u_\tau = g_{\sigma,\tau}\, u_{\sigma\tau}$

(1b) $u_\sigma g = g\, u_\sigma$ $\qquad (\rho,\sigma,\tau,\cdots\cdots \subset \Gamma)$

(1c) $g_{\sigma,\tau}\, g_{\rho,\sigma\tau} = g_{\rho,\sigma}\, g_{\rho\sigma,\tau}$

トスル。我々ハ帰納法ニ依ッテ定理ヲ証明シタイノデアルカラ Γ ヲ群ニモツ体 K ガスデニ出来タトスル。ソノトキモシ

(2) $\quad (\chi(g_{\sigma,\tau}), K/k, \Gamma) \sim 1$

ナラバ

$$\chi(g_{\sigma,\tau}) = \frac{\delta_\sigma^\tau \delta_\tau}{\delta_{\sigma\tau}}$$

$$1 = \chi(g_{\sigma,\tau})^p = \frac{(\delta_\sigma^p)^\tau \delta_\tau^p}{\delta_{\sigma\tau}^p}$$

従ッテ $\quad \delta_\sigma^p = \gamma^{\sigma-1} \quad (\gamma \subset K).$

コノ γ ヲ使ッテ $K(\theta)$ $(\theta = \sqrt[p]{\gamma})$ ヲ作ルト $K(\theta)/k$ ノガロア群ガ G ニナル。(証明ハ Witt 参照)

γ ハコノ際上ノ *process* カラ得ラレル数デアレバ，ドノヤウナ数デアッテモ差支ヘナイ、従ッテ (2) ノ假定ノ下ニ得ラレル一般ノ γ ノ形ハ

(3) $\quad \gamma' = \gamma \alpha^p \beta \quad (\alpha \subset K, \ \beta \subset k)$

デアル。

§2. (定理1) G ガ與ヘラレタ p-*Gruppe*

$$k = R(e^{\frac{2\pi i}{p}})$$

ナラバ G ヲガロア群ニ持ツ体 K ガアッテ而モ次ノ條件ヲ満足スル。

1. k ノ *unendliche Primstelle* ハ K デ *verzweigen* シナイ。

2. モシ *Primideal* $\mathfrak{q}$ ガ K デ分岐スレバ

$\mathfrak{q} \nmid p, \ \zeta \underset{(p^f)}{\equiv} 1 \bmod \mathfrak{q}$ (in k)

K/k ニ於ケル $\mathfrak{P}$ ノ相對次數ハ1.」

$\left(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}},\ f$ ハ與ヘラレタ自然數$\right)$

g ヲ §1 デ作ツタヌウナ分群, $G_1 = G/g$ トスル。G_1 デ g ト同ジ性質ヲ持ツ群 (*principal subgroup* ト *centrum* ニ共通ナ p 次ノ群) ヲ g_1 トシテ $G_2 = G_1/g_1$ トヲク。以下同様ニシテ $G_{h-1} = G_{h-2}/g_{h-2}$, $G_h = G_{h-1}/g_{h-1}$ ヲ作リ G_h ガ始メテ $(p, p, \cdots\cdots, p)$ ノ型ニナツタトスル。

定理1ヲ G ガ $G_h, G_{h-1}, G_{h-2}, \cdots\cdots$ ノ場合ニ帰納法ニ依ツテ証明スルノデアルガ G_h ノトキハ後ニ述ベルコトトシ, コヽデハ G_h ノ時ニハスデニ出來上ツタモノトスル。

サスレバ定理1ガ $G^* \neq 1$ ナル群ノ *Faktorgruppe* $\Gamma = G/g$ ニ就イテ証明サレテキルトキニ G ニ就イテモ成立スルコトヲ云ヘバ証明ガ終ルワケデアル. Γ ニ對スル体ヲ K_1 トスル。

§1 ノ様ニシテ作ツタ環ヲ

$$A = (\chi(g_{\sigma,\tau}),\ K_1/k,\ \Gamma)$$

トスレバ

$$A \sim 1$$

ハ次ノ様ニシテワカル。

α) k ノ *Primstelle* ヲ一般ニ $\mathfrak{p}$ トスルト

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$ ナラバ定理1ノ條件1ニヨツテ

$$A_{\mathfrak{p}} \sim 1.$$

β) $\mathfrak{p}$ ガ K_1 デ unverzweigt ナラバ $K_1^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ ハ zyklisch デ

$$A_{\mathfrak{p}} \sim (a_{\sigma,\tau},\ K_1^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}},\ \Gamma_{\mathfrak{p}}) = B_{\mathfrak{p}}$$

但シ $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ ハ Zerlegungsgruppe デ $a_{\sigma,\tau}$ ハ $\sigma,\tau \subset \Gamma_{\mathfrak{p}}$ ナル $\chi(g_{\sigma,\tau})$ ノ subset デアル. $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ ノ Erzeugende ヲ F, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}$ ガ

$$u_S u_T = a_{S,T} u_{ST} \qquad u_1 = 1$$

$$z u_S = u_S z^S \qquad z \subset K_1^{\mathfrak{p}}$$

デ定義サレテヰルモノトシテ之レヲ次ノ標準型ニ直ス。

$$v_{F^i} = u_F^i \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1,\ n = (K_1^{\mathfrak{p}} : k_{\mathfrak{p}}))$$

$$v_F^n = a_{F,F}\, a_{F^2,F}\, a_{F^3,F} \cdots\cdots a_{F^{n-1},F} = \alpha$$

$$B_{\mathfrak{p}} = (\alpha,\ K_1^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}},\ F)$$

α ハ unit デアルカラ $\alpha = N_{K_1^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}}(\Theta)$, $\Theta \subset K_1^{\mathfrak{p}}$

$$\therefore\ A_{\mathfrak{p}} \sim 1$$

γ) $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ ガ K_1 デ分岐スルトキハ條件2カラ $A_{\mathfrak{q}} \sim 1$ ガ出ル. 即チ先ヅ $\mathfrak{q} \nmid p$ カラ

Verzweigungsgruppe $V_{\mathfrak{q}} = 1$

K_1/k ニ於ケル Relatiograd 1 カラ

Zerlegungsgruppe $\Gamma_{\mathfrak{q}}$ = Trägheitsgruppe $T_{\mathfrak{q}}$

ヨク知ラレタ様ニ $T_{\mathfrak{q}}/V_{\mathfrak{q}}$ ハ zyklisch

$\therefore$ <u>$\Gamma_{\mathfrak{q}}$ ハ zyklisch</u>

$\mathfrak{q} \nmid p$ カラ $\mathfrak{f}(K_1^{\mathfrak{q}}/k_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{q}$。定理1ノ中ノ f ヲ

充分大ニトッテ置イタモノト考ヘレバ

$$\zeta \underset{(\pi)}{\equiv} 1 \mod \mathfrak{f}(K_1^{\sigma}/k_{\sigma})$$

即チ ζ ハ K_1^{σ} カラノ或ル數ノ Naum トナル。

$\therefore$ β) ト全様ニ

$$A_{\sigma} \sim 1$$

従ッテ環ノ Naemensatz カラ

$$A \sim 1$$

ガ結論サレル。

サスレバ §1 デ述ベタ方法デ G ヲ群ニ持ツ体 $K_2 = K_1(\sqrt[p]{\gamma})$ ガ作レル。コノ K_2 ガ定理1ノ條件ヲ滿足シテ居レバ問題ハ片付イタワケデアルガ一般ニハソウハユカナイカラ γ ニハ §1. ノ (3) ノ形ノ自由性ノアルコトヲ利用シテ適當ナ γ' ヲトレバ $K_2' = K_1(\sqrt[p]{\gamma'})$ ガ條件ヲ滿足スルコトヲ次ニ示シタイ。