

396 *Linear Operation* = ツイテ (I)

泉 信一 (東北大)

北川 敏男 (阪大)

本論文の目的は *translatable* (乃ち *translation*)

ト commutative +) operation が integration ト commutative デアルカドウカヲ論ズルコトデアイル。

1. (a, b) ヲ有限区間 トスル。 $f(x)$ ヲ $(a, b) =$ 於イテ定義サレタ積分可能ナ函数トシ, $f(x)$ ノ作ル空間ヲ E トスル。
 $\Lambda f = \Lambda(f(x))$ ヲ $E =$ 於テ定義サレタ additive デ且ツ translatable + operation デ, Λf ノ contradomain ハ $(a, b) =$ 於テ定義サレタ積分可能ナ函数ノ作ル空間 E ,
 $=$ フクマレテルトスル。但シ $(a, b) =$ 於テ定義サレタ函数 $=$ periodic continuation ヲシテ $(-\infty, \infty) =$ 於テ定義サレタ函数ヲ考ヘルモノトスル。

更ニ Λf ハ次ノ條件ヲ満足スルトスル。乃チ

条件 1° $f_n(x) \in E (n=1, 2, \dots)$ ナルトキ, 殆ンドスベテノ $x =$ 對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

トナル様ナ $f(x) \in E$ が存在スルナラバ, スベテノ $x =$ 對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda(f_n(x)) = \Lambda(f(x)). \dots\dots\dots (1)$$

例ヘバ, $E = L(a, b) = (L) =$ トリ, ソノ元素 f ノ norm ヲ

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

$=$ ヲツテ定義スル。 E ヲ (M) スハ $(C) =$ トリ、ソノ element

$g = \Lambda f$ ノ norm ヲ

$$\|g\| = \text{l. u. b. } g(t) \quad a \leq t \leq b$$

= ヲツヲ定義スル。然ルトキ、 Λf が *linear translatable* ナラバ、条件 1° の明カニ満足サレテ居ル。

又 E が (L^p) , (M) , (S) 及 (C) の一ツノ空間デ、 E_1 が (M) 又ハ (C) ノ一ツナルトキ、*norm* ヲ通常ノ様ニトシテ *linear transl.* + Λf ノ明カニ条件 1° ヲ満足スル。ケレド $\epsilon \in E_1 = (L^p) (p > 0)$ トシ、ソノ元素 g ノ *norm* ヲ

$$\|g\| = \sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p dt}$$

ニトルトキ $\Lambda f = g$ が *linear transl.* デアツテ ϵ 。必ズシニ条件 1° ノ満足サレナイ。 $E_1 = (S)$ ノトキニモ同様デアル。

$$2. \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

トオク。

$$\Lambda(f(x)) = g(t)$$

トオク。

特ニ $\Lambda(f(x))$ が t ノ函数デアレコトヲ明カニスルタメ

=

$$\Lambda(f(x)) = \Lambda\{t, f(x)\}$$

トモ書ク。 Λ , *translatable* ナルコトカラ

$$\begin{aligned} \Lambda(f(x+a)) &= \Lambda\{t, f(x+a)\} = \Lambda\{t, T_a f(x)\} \\ &= T_a \Lambda\{t, f(x)\} = g(t+a) \end{aligned}$$

Λ , *additiv* ナルコトカラ

$$\sum_{i=1}^n g(t+\xi_i)(\xi_{i+1}-\xi_i) = \sum_{i=1}^n \Lambda\{t, f(x+\xi_i)\}(\xi_{i+1}-\xi_i)$$

$$= \Lambda \left\{ t, \sum_{i=1}^n f(x + \xi_i) (\xi_{i+1} - \xi_i) \right\}$$

然レ、一方ニ於テ $f(x)$ 及ビ $g(t)$ が可積分ナルカラ
 Khintchine-Jessen, 定理⁽¹⁾ニヨリ、次ノ抄整数列 $\{n_k\}$
 及ビ $\{\xi_k\}$ ヲトルコトが出来ル。乃チ殆ンドスベテノ x 及ビ
 t = 對シテ 同時 =

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} f(x + \xi_i) = \int_a^b f(x + \xi) d\xi.$$

及ビ

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} g(t + \xi_i) = \int_a^b g(t + \xi) d\xi$$

從ツテ 條件 I° カラ

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \Lambda \left\{ t, \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} f(x + \xi_i) \right\} = \Lambda \left\{ t, \int_a^b f(x + \xi) d\xi \right\}$$

故ニ

$$\int_a^b \Lambda \{ t + \xi, f(x) \} d\xi = \Lambda \left\{ t, \int_a^b f(x + \xi) d\xi \right\} \dots \dots \dots (2)$$

故ニ 次ノ 定理ヲ 得ル。

定理 1 條件 I° ヲ 満足スル Additive translatable
 operation Λf ノ integration ト commutative ナルヲ
 乃チ (2) が 成立スル。

3. 次ニ 條件 I° が 次ノ 條件ニ ヨツテ オキカヘラレタ 場合

(1) A. Khintchine, *Recueil math.*, Moscow, 41 (1934) and
 B. Jessen, *Annales of Math.*, 35 (1934).

ヲ考ヘル。乃チ

条件2° 条件1°ト同ジ假定ノ下ニ(1)ガ殆ンド常ニ成立スルトスル。

然ルトキ定理1ト同様ニシテ次ノ定理ヲ得ルコトハ勿論デアアル。

定理2 条件2°ヲ満足スル *additive translatable operation* Λf ハ殆ンド常ニ *integration* ト *commutative* デアル、乃チ(2)ガ殆ンドスベテノ t ニ對シテ成立スル。

特ニ E 及ビ E_1 ガ空間 (L^p) , $(p > 0)$, (M) 及ビ (C) ノウチノ何レカ一ツヲ且ツ Λf ガ *linear translatable* ノトキニハ、定理2カラ(2)ガ殆ンドスベテノ x ニ對シテ成立スル。

4. 次ニ条件1°又ハ2°ノ代リニ次ノ条件ガ満足サレテルトスル。乃チ

条件3° $f(x) \in E$ ニ對シテ

$$|\Lambda\{t, f(x)\}| \leq G |f(t)|$$

トナル様ニ G ガ存在スル。

(c, d) ヲ任意ノ區間トシ

$$c = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = d \dots \dots \dots (3)$$

トオク。任意ノ $f \in E$ ニ對シテ、殆ンドスベテノ x ニ對シテ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x), |f_m(x)| \leq |f(x)| \quad (m=1, 2, \dots) \dots \dots (4)$$

トナルマツテ連続函数列 $\{f_m(x)\}$ ヲ作ル。

今条件3°ガ満足サレテルトスルトキ

$$g_m(t) = \Lambda \{t, f_m(x)\}$$

トオクナラバ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(t) = g(t) \text{ ----- (5)}$$

然ル = §2 ト同様 = シテ

$$\sum_{i=1}^n g_m(t+x_i)(x_{i+1}-x_i) = \Lambda \left\{ t, \sum_{i=1}^n f_m(x+x_i)(x_{i+1}-x_i) \right\}$$

Holm⁽¹⁾ = ヲヨリ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_m(t+x_i)(x_{i+1}-x_i) = \int_c^d g_m(t+x) dx$$

ナレヤウ = (3) ヲトルコトが出来ル。然ル = 又 $f_m(x)$ ノ連続
ナコトカラ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_m(x+x_i) \cdot (x_{i+1}-x_i) = \int_c^d f_m(x+u) du$$

故 = 條件 1° カラ

$$\int_c^d g_m(t+x) dx = \Lambda \left\{ t, \int_c^d f_m(x+u) du \right\}$$

(4) 及ビ (5) カラ、両辺 = 於テ $m \rightarrow \infty$ ナラシメルトキ

$$\int_c^d g(t+x) dx = \Lambda \left\{ t, \int_c^d f(x+u) du \right\}$$

乃チ

$$\int_c^d \Lambda \{t, f(x+u)\} du = \Lambda \left\{ t, \int_c^d f(x+u) du \right\} \text{ ----- (6)}$$

故 = 次ノ定理ヲ得ル。

(1) H. Hahn, Wiener Berichte, 123, II_a, 1 (1914), pp. 713—743

定理3 任意, additive translatable operation

\wedge が条件3°ヲ満足スルナラバ, \wedge ハ任意ノ區間ニ於ケル積分

ト commutative ナアル、乃チ (6) が成立スル。

定理ハ區間 (a, b) が $(-\infty, \infty)$ ノトキニモ成立スル。