393 補助変数ヲ含ム微分方程式

福原満洲雄（北大）

$$(1)\quad \frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda)$$

ノ右辺ガ y,λ ＝関シテ微分出來ルトキ，其ノ解ノ λ＝關スル微分可能性ノ定理ハ微分方程式ノ特異点ノ研究＝モ重要ナ役割ヲ演ズルカラ、解ノ存在定理ヤ單独條件ナドト同ジ程度＝精密ナ結果ヲ出シテ置クコトガ望マシイ。而モ其レ等ガ解ノ存在定理ノ應用トシテ求メラレルコトヲ以下＝於テ簡單＝述ベテ見ヤイ。

$\varphi_0(x)$ ハ $0<x\leqq a$ デ連続ナ

$$(2)\quad \frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda_0)$$

ノ解，$f(x,y,\lambda)$ ハ

$$(3)\quad 0<x\leqq a,\quad |y-\varphi_0(x)|\leqq b\gamma(x),\quad |\lambda-\lambda_0|\leqq c$$

デ連続デ

$$f(x,y,\lambda)=f(x,\varphi_0(x),\lambda_0)+h(x,y,\lambda)(y-y_0)+k(x,y,\lambda)(\lambda-\lambda_0)$$

ト書クコトガ出來ルトスル。（f ガ y,λ ＝関シテ連続ナ偏導函数ヲ持テバ平均値ノ定理ヲ使ッテ此ノ形＝書ケル）

$h(x,y,\lambda)$，$k(x,y,\lambda)$ ハ

$$(4)\quad |h(x,y,\lambda)|\leqq H(x),\quad |k(x,y,\lambda)|\leqq K(x)$$

ヲ満足シ

$$\frac{1}{H(x)}h(x,y,\lambda),\quad \frac{1}{K(x)}k(x,y,\lambda)$$

ハ (3) デ一様連続トスル。

(5) $$\lim_{x\to+0}\frac{y(x)-\varphi_0(x)}{r(x)}=0 \quad 即チ\ y(x)=\varphi_0(x)+o(r(x))$$

ヲ満足スル (1) ノ解ヲ $y=\varphi(x,\lambda)$ トスルトキ

(6) $$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\varphi(x,\lambda)-\varphi_0(x)}{\lambda-\lambda_0}=\psi_0(x)$$

ガ存在スルタメニ $H(x)$, $K(x)$ ガ満足スベキ十分條件ヲ求メルノガ目的デアル。成ルベク式ヲ簡單ニスルタメ

$$H(x)=\frac{\eta'(x)}{\eta(x)},\quad \eta(x),\ \eta'(x)>0$$

ト假定スル。

(7) $$h_0(x)=h(x,\varphi_0(x),\lambda_0),\quad k_0(x)=k(x,\varphi_0(x),\lambda_0)$$

ト置ケバ, $u=\psi_0(x)$ ハ

(8) $$\frac{du}{dx}=h_0(x)u+k_0(x)$$

ノ解デナケレバナラナイ。此ノ方程式ガ $u=o(r(x))$ ヲ満足スル解ヲ唯一ツ持ツタメニハ

(9) $$r(x)=O(\eta(x))$$

(10) $$\int_0^x\frac{K(x)}{\eta(x)}dx=o\left(\frac{r(x)}{\eta(x)}\right)$$

デアレバヨイ. ソノ時

$$|\psi_0(x)|\leqq\eta(x)\int_0^x\frac{K(x)}{\eta(x)}dx=\Psi_0(x)$$

ヲ得ル、此ノヤウニ $\psi_0(x)$ ヲキメテカラ

$$y=\varphi_0(x)+\psi_0(x)(\lambda-\lambda_0)+z$$

ト置キ，z ガ満足スル方程式ヲ

$$(11)\qquad \frac{dz}{dx}=g(x,z,\lambda)$$

ト書ケバ

$$g(x,z,\lambda)=h(x,y,\lambda)z+[h(x,y,\lambda)-h_0(x)](\lambda-\lambda_0)\psi_0(x)$$
$$+[k(x,y,\lambda)-k_0(x)](\lambda-\lambda_0)$$

トナルカラ正ノ数 ε ガ與ヘラレタトキ，正ノ數 β,γ ヲ十分ニ小サク取レバ

$$0<x\leqq a,\quad |z|\leqq\beta\gamma(x),\quad |\lambda-\lambda_0|\leqq\gamma$$

デ

$$|g(x,z,\lambda)|\leqq H(x)|z|+\varepsilon\{H(x)\Psi_0(x)+K(x)\}|\lambda-\lambda_0|$$

ヲ得ル、故ニ存在定理及ビ比較定理ヲ使ッテ (11) ト

$$(12)\qquad \frac{dZ}{dx}=H(x)Z+\varepsilon\{H(x)\Psi_0(x)+K(x)\}|\lambda-\lambda_0|$$

ヲ比較スレバ次ノ結論ヲ得ル。(12) ガ $Z=o(\gamma(x))$ ヲ満足スル解

$$Z=\varepsilon|\lambda-\lambda_0|\Psi_1(x)$$

ヲ持テバ（(9) ニ依ッテ唯一ツニ限ル），(11) ハ $z=o(\gamma(x))$ ヲ満足スル解ヲ持チ，其ノ解ハ

$$|z|\leqq\varepsilon|\lambda-\lambda_0|\Psi_1(x)$$

ヲ満足スル、依ッテ

$$(13)\qquad \left|\frac{\varphi(x,\lambda)-\varphi_0(x)}{\lambda-\lambda_0}-\psi_0(x)\right|\leqq\varepsilon\Psi_1(x),\quad \Psi_1(x)=o(\gamma(x))$$

トナリ(6)ヲ得ル、(12)ガ$Z=o(\gamma(x))$ヲ満足スル解ヲ持ツタメニハ

$$(14)\quad \int_0^x K(x)\frac{\log\eta(x)}{\eta(x)}dx = o\left(\frac{\gamma(x)}{\eta(x)}\right)$$

デアレバヨイ、(10)ハ(14)ノ結果デアルカラ、$\eta(x)$, $K(x)$ガ満足スベキ條件ハ(9),(14)デ、ソノ時(13)ヲ得ル。此ノ定理ノ應用ニ関シテハ別ノ機會デ述ベルコトニシヨウ。

以上述ベタ方法ハ

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\varphi(x,\lambda)-\varphi_0(x)}{(\lambda-\lambda_0)^\alpha}$$

ガ存在スル條件ヲ求メル場合ニモ或ハモツト一般ナ場合ニモ何ノ困難モナシニ拡張サレルガ最モヨク利用サレルノハ$\alpha=1$ノ場合デアルカラ此ノ場合ニツイテ述ベタノデアル。尚ホ$f(x,y,\lambda)$ガy,λニ関シテ解析函数ナラバ(13)ハ複素変数λノ函数$\varphi(x,\lambda)$ガλニ関シテ微分出來ルコトヲ示スカラ$\varphi(x,\lambda)$ハλノ正則函数トナルコトヲ知ル。