387. 素ナル標數ノ体ノ上ノ多元環ニツイテ II.

中　山　　正（阪大）

前回ノ報告第87号384ノ10頁13行目「ソノ中最小ナルモノ」ト書イタノハ「次数が最小ナルモノ」ト訂正イタシマス。

次ニ前回証明シタノハ素ナル標數 P ノ体ノ上ノ p-Potenz ノ Index ノ多元環類ハ常ニ巡回環ノ積トシテ表ハサレルコトデシタ。而シテ一般ニソノヤウナ多元環類ハ zyklisch トハカギラナイデアラウト思ヒマス（實際ニ例ヲ作ラナイ以上ハッキリハ申セマセンガ、多分ソウデアルツモリデ居マス）カラ、ソノ意味デ是モ角一應完全ナワケデアリマス。然シ，實ハモット細イ構造ヲ出シタイト思ッテ居リマスノデ，ソノ第一トシテ

<u>若シ $(K^{p^{-1}}:K)$ が有限デアッテ，ソレヲ p^m トスレバ，K ノ上ノ p-Potenzindex ノ多元環類 $\mathfrak{A}$ ハ必ズ高々 m 個ノ巡回環ノ直積デ表ハサレル</u>。

証明ハ大体前回ト並行、9頁15行目以下ノ補助定理ヲ一寸一般ニシテ

Grad $n = p^g$ ナル normal-einfach ナ A が $K(\alpha): a = \alpha^n \in K$ ナル完全第二種ノ最大部分体 $K(\alpha)$ ヲ含ミ，<u>且ツ $K(\alpha)$ ノ眞部分体ニ同型ナ分解体ヲ持タナイナラバ</u> A ハ zyklisch デ、前回ノ場合ト同様ニ

$$A=(a, Z, S)=Z+\alpha Z+\cdots\cdots+\alpha^{n-1}Z$$

ナル形ニ表ハサレル。

前回モ証明ハ略シタカラ、次ニ簡単ニ述ベヨウ。ヤハリ Albert ノヲ modify スレバヨイ。帰納法ニヨルタメ n ヨリ低イ場合ニハ成立ツトシヨウ。 A ニオイテ $\alpha^{p^{g-1}}=\sqrt[p]{a}$ ト可換ナ元全体ヲ B トスル、シカラバ B ハ $K(\sqrt[p]{a})$ ノ上ニ normal-einfach デアリ、$K(\alpha)$ ハヤハリソノ最大部分体ダが、ソノ真部分体ハ分解体デアリ得ナイ、ソレハ $B\sim A_{K(\sqrt[p]{\alpha})}$ ダカラデアル。

ヨッテ假定ニヨリ B ハ

$$B=(\sqrt[p]{a}, Z', S)=Z'+\alpha Z'+\cdots\cdots+\alpha^{\frac{n}{p}-1}Z'$$

ナル形ニナル、而シテ Albert ノ（前回モ引用シタ論文ノ）定理2ニヨリ

$$Z'=Z_{g-1}\times K(\sqrt[p]{a})$$

ナル K ノ上ノ $\frac{n}{p}=p^{g-1}$ 次ノ巡回拡大 Z_{g-1} ガアル、而シテ A ニオイテ Z_{g-1} ノスベテノ元ト可換ナ元全体ヲ D トスル、D ハ Z_{g-1} ニ對シテ Grad p デアル．若シ D が Divisionsalgebra ナラバ Albert ノ定理1ニヨリ、モシソウデナケレバ．即チ zerfallen シテ居レバソノ定理ノ証明カラ，孰レニシテモ D ノ中ニハ

$$\sqrt[p]{a}\,(x_{01}+1)=x_{01}\sqrt[p]{a}$$

デアリ、且ツ

$$D=Z_{g-1}(x_{01}, \sqrt[p]{a})$$

トナル如キ元 $x_{0'}$ ガ存在スル。今 $x_0=(-1)^{g-1}x_{0'}$ トオケバ $x_0\sqrt[p]{a}=\sqrt[p]{a}\,(x_0+(-1)^{g-1})$ デアル。

次ニ $\alpha^{-1}x_0\alpha$ ハトモカク $\mathfrak{D}$ ノ元ナルコトハ容易ニ分ルカラ、ソレヲ

$$\alpha^{-1}x_0\alpha=\sum_{i=0}^{p-1}b_i(\sqrt[p]{a})^i;\quad b_i\in Z_{g-1}(x_0)$$

ナル形ニアラハス。

（$\mathfrak{D}$ ガ Zerfallen スル場合ヲモ扱ッテヰルノガ前回ト、マタ Albert トモ異ッテヰル点デアル、ソノ場合ニハ $Z_{g-1}(x_0)$ ハ Körper デナイコトニ注意サレタイ）

而シテ之レヲ更ニ $\sqrt[p]{a}$ デ transform シテ見ルト、左辺カラ容易ニワカル如ク $(-1)^{g-1}$ ガ加ハル、依ッテ直チニ $(\sqrt[p]{a})^{-1}b_0(\sqrt[p]{a})=b_0+(-1)^{g-1}$, $i=1,2,\text{------},p-1$ ニ對シテハ $(\sqrt[p]{a})^{-1}b_i(\sqrt[p]{a})=b_i$ トナル、依ッテ先ヅ $i\neq 0$ ナラ $b_i\in Z_{g-1}$ デアル、何トナラバ b_i ハ $\sqrt[p]{a}$ ト可換、マタ x_0 ト勿論可換ダカラ $\mathfrak{D}$ ノ核心 Z_{g-1} ノ元デナケレバナラヌカラデアル、マタ $(\sqrt[p]{a})^{-1}x_0(\sqrt[p]{a})=x_0+(-1)^{g-1}$ デアルカラ b_0-x_0 ガ同様ニ Z_{g-1} ノ元デアル。ヨッテ併セテ

$$\alpha^{-1}x_0\alpha=x_0+P;\quad P\in Z_{g-1}(\sqrt[p]{a})$$

トナル、之レヲ繰返セバ

$$\alpha^{-p^{g-1}}x_0\alpha^{p^{g-1}}=x_0+P+P^S+\cdots\cdots+P^{S^{p^{g-1}}}=x_0+S_{K'/K(\sqrt[p]{a})}(P)$$

トナル、左辺ハマタ $(\sqrt[p]{a})^{-1}x_0\sqrt[p]{a}=x_0+(-1)^{g-1}$ ニ等シイ、依ツテ

$$S_{Z'/K(\sqrt[p]{a})}(P)=(-1)^{g-1}$$

然ルニ他方（Albert ノ記法ニヨル）β_{g-1}（Albert ノ論文 184 頁ヲ参照サレタイ）ノ

$$S_{Z_{g-1}/K} \quad \text{即チ} \quad S_{Z'/K(\sqrt[p]{a})}$$

モマタ $(-1)^{g-1}$ デアル、ヨツテ Z' ノ中ニ

$$\xi^S-\xi=\beta_{g-1}-P$$

ナル ξ ガアル。（ξ ノ存在ハ Artin-Schreier ノ最初ノ論文デモ、マタ以前ノ Albert ノ Bulletin 40 (1934) ノ論文デモ Polynom ノ計算デ出シテヰル。ソノ証明モ面白イガ、コノ事実ハ Summandensystem（Faktorensystem ニ對應シテ）ニ関スル一般ノ定理ノ中ニ含マレルワケデ、ソウシタ意味ニ於イテ、ヨリ見易ク証明モ出來ル。例ヘバ Crelle 173, S. 43 ノ Witt ノ論文参照）、而シテ $x'=x_0+\xi$ トオケバ

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}x'\alpha&=x_0+P+\xi^S=x_0+P+\xi+\beta_{g-1}-P\\&=x'+\beta_{g-1}.\end{aligned}$$

デアル、繰返セバ

$$(\sqrt[p]{a})^{-1}x'(\sqrt[p]{a})=x'+(-1)^{g-1}$$

ガ成ル、今 $(X-x')(X-x'+1)\cdots\cdots(X-x'+P-1)$ ヲ作ツ

テ見ル、コヽニ X ハ不定元デ勿論 x' ト可換トスル、実際ニ計算スルト

$$X^p - X - C$$

ナル形ニナル、コヽニ C ハ $\pm x'(x'+1)\cdots\cdots(x'+p-1)$ デアルカラ容易ニ $\sqrt[p]{a}$ ト可換ナルコトガワカル、マタ x' ト可換、故ニ Z_{g-1} ノ元デアル、何トナラバ

$$D = Z_{g-1}(x_0, \sqrt[p]{a}) = Z_{g-1}(x', \sqrt[p]{a})$$

ダカラデアル、故ニ

$$x'^p - x' = c \in Z_{g-1}$$

而シテコノ式ヲ α デ transform スルコトニヨリ容易ニ

$$\alpha^{-1} c \alpha - c = c^S - c = \beta_{g-1}^p - \beta_{g-1}$$

トナル、コノ事カラ $X^p - X - C = 0$ ガ Z_{g-1} デ irreducible ナルコトガワカリ（Albert, Bulletin 40），従ッテソレガ x' ノ Z_{g-1} ニ於ケル minimal equation デアリ、$Z_{g-1}(x')$ ハ Körper デアル。（コノコトハ D ガ Divisionsalgebra ナラ自明デアッタ）。以下 $Z_{g-1}(x') = K(x')$ ガ K ノ p^g 次ノ巡回拡大デアリ、α ニヨリソノ生成置換ガオコサレルコトモ明カデアリ、依ッテ主張ガ証明サレル。

コノコトヲ使ッテ我々ノ定理ヲ証明スル、先ヅ $(K^{p^{-1}} : K) = p^m$ ナラバ K ノ中カラ適当ニ m 個ノ元 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m$ ヲトリ出シテ

$$K^{p^{-1}} = K(\sqrt[p]{a_1}, \sqrt[p]{a_2}, \cdots\cdots, \sqrt[p]{a_m})$$

ト出來ル、而シテ任意ノ $e \geqq 1$ ニ對シテ

$$K^{p^{-e}} = K(\sqrt[p^e]{a_1}, \cdots\cdots, \sqrt[p^e]{a_m})$$

デアル、依ッテ私ノ昨年ノ學士院ノ小論文ニヨッテ $\mathfrak{a}$ ナル多元環類ハトモカク

$$L = K(\sqrt[p^{e_1}]{a_1}, \sqrt[p^{e_2}]{a_2}, \cdots\cdots, \sqrt[p^{e_l}]{a_l});\ e_i \geqq 1,\ l \leqq m$$

ナル形ノ分解体ヲモツ、コヽニ

$$K(\sqrt[p^{e_1-1}]{a_1}, \sqrt[p^{e_2}]{a_2}, \cdots\cdots, \sqrt[p^{e_l}]{a_l})$$

ハモハヤ分解体デナイト假定シテカマハヌ、依ッテ

$$\mathfrak{a}_{\overline{K}},\ \text{但シ}\ \overline{K} = K(\sqrt[p^{e_2}]{a_2}, \cdots\cdots, \sqrt[p^{e_l}]{a_l})$$

ニ對シテ上ニ証明シタ事実ヲ適用シテ、后ハ前回ニヤッタノト大体同ジ方法デヤッテ行ケバヨイノデアル、即チ一ツダケ巡回環類ヲ取リ出シテ残リハ $\overline{K}$ ガ分解体トナルヤウニスルノデアル。結局 l 個ノ巡回環類ノ積ニナル。

「次元論」プリント

Paul Alexandroff ノ大著 "Dimensionstheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen." (Math. Ann. Bd. 106 S. 161—238) ヲプリント刷リニシタイト思ヒマス。希望者ハ至急御申込ミ下サイ。

但シ希望者餘リニ少ナケレバ中止デス。五十名程ナラバプリント刷リ，百名程ナラバ寫眞版（オフセット）ニスル豫定デス。

定價ハ何レニテモ二，三円デス。