385. Quasi-metric Space ニ就イテ

角谷 靜夫（阪大）

空間 R ノ任意ノ二点 x, y ニ對シテ x ヨリ y ヘノ dis-

tance xy 及ビ y ヨリ x ヘノ *distance* yx ガ定義サレテコレガ

$$\text{i)}\quad xy \geqq 0 \left\{\begin{array}{l} xy=0 \text{ 及ビ } yx=0 \text{ ガ同時ニ成立スル} \\ \text{ノハ } x=y \text{ ナルトキ且コノ時ニ限ル。} \end{array}\right\}$$

$$\text{ii)}\quad xy+yz \geqq xz$$

ヲ満足スルトキ R ハ *quasi-metric* デアルト云フ。$xy=yx$ ハ必ズシモ満足サレテヰル必要ハナイ。($xy=yx$ ガ常ニ満足サレテ居レバ R ハ *metric space* ニナル。)

quasi-metric space ハ Wilson (American Journ. of Math. 1931) ニヨッテ研究サレタ。Wilson ハ *quasi-metric space* ノ一例トシテ，*metric space* R^* (コレニ属スル二点 a, b ノ距離ハ $\rho(a,b)$ ニテ與ヘラレルモノトスル) ニ於ケル閉集合ヲ *element* トスル空間ニ於テ二ツノ閉集合 A, B ニ對シテ A ヨリ B ヘノ距離 AB ヲ

$$AB = \underset{b\in B}{\text{upper bound}} \left\{ \underset{a \in A}{\text{lower bound}}\ \rho(a,b) \right\} \qquad (1)$$

ニヨッテ定義スレバヨイコトヲ示シテヰル。(A, B ニハ共通点ガアッテモヨイ。又 $AB=0$ トナルノハ $B \subseteqq A$ ナルトキ且ソノ時ニ限ル。故ニ $AB=BA=0$ トナルノハ $A=B$ ナルトキ、且ソノ時ニ限ル。)

次ニコノ逆ガ成立スルコトヲ証明スル。即チ次ノ定理ガ成立スルコトヲ証明スル。

定理　空間Rが quasi-metric デアレバ metric space R^* ヲ適當ニ定メテ R^* ニ於ケル閉集合ヲ element トスル空間ニ(1)ニヨリ quasi-metrics ヲ導入シタモノガ R ト iso-(quasi)-metric ニナルヤウニスルコトガ出來ル。

シカモ R^* トシテ $R\times R$ ニ於イテ定義サレタ實數値ノ函數 $f(\xi,\eta)$ $(\xi,\eta\in R)$ ヲ element トスル空間ヲ考へ、コレニ屬スル f_1, f_2 ニ對シテ距離 $\rho(f_1,f_2)$ ヲ

$$\rho(f_1,f_2)=\underset{\xi,\eta\in R}{\text{upper bound}}\left|f_1(\xi,\eta)-f_2(\xi,\eta)\right|$$

ニヨッテ定義シ R ニ屬スル一点 x ニ對應スル R^* ノ閉集合トシテスベテノ ξ,η ニ對シテ

$$-\xi x\leqq f(\xi,\eta)\leqq \eta x$$

ヲ滿足スルアラユル函數 $f(\xi,\eta)$ ノ集合 F_x ヲトレバヨイ。

証明．　F_x ガ閉集合デアルコトハ明カデアルカラ

$$xy=\underset{f_2\in F_y}{\text{upper bound}}\left\{\underset{f_1\in F_x}{\text{lower bound}}\ \rho(f_1,f_2)\right\}$$

トナルコトヲ証明スレバヨイ。

$f_2\in F_y$ ヲ F_y ニ屬スル任意ノ函數トスレバ任意ノ ξ,η ニ對シテ

$$-\xi y\leqq f_2(\xi,\eta)\leqq \eta y$$

デアリ且ツ

$$\eta y - \eta x \leqq xy, \quad \xi y - \xi x \leqq xy$$

デアルカラ $f_1(\xi, \eta)$ ヲ適當ニ定義シテ

$$-\xi x \leqq f_1(\xi, \eta) \leqq \eta x$$

ニテ

$$|f_1(\xi, \eta) - f_2(\xi, \eta)| \leqq xy$$

トナル如クスルコトガ出來ル。ヨツテ

$$\text{lower bound } \rho(f_1, f_2) \leqq xy$$

然ルニ $R \times R$ ノ點 (y, x) ニ於テ $f(y, x) = xy$ トナル如キ F_y ノ函數 $f_2(\xi, \eta)$ ヲトレバ F_x ニ屬スル任意ノ函數 $f_1(\xi, \eta)$ ニ對シテ

$$-yx \leqq f_1(y, x) \leqq 0$$

デアルカラ $\rho(f_1, f_2) \geqq xy$.

コレヨリ、コノ f_2 ニ對シテハ

$$\underset{f_1 \in F_x}{\text{lower bound}}\, \rho(f_1, f_2) \geqq xy$$

ヨツテ結局

$$xy = \underset{f_2 \in F_y}{\text{upper bound}} \left\{ \underset{f_1 \in F_x}{\text{lower bound}}\, \rho(f_1, f_2) \right\}$$

トナル。