380. Borel ノ意味ノ除外値ト漸近値

津　村　善　郎（東大）

詰マラヌコトデスガ、Borel ノ意味ノ例外値ガ漸近値ニナラヌ例ヲ作ツテ見タイト思ヒマス。此ノ函数ハ order ガ任意ニ作レマス。之レハ勿論 Nevan-linna ノ意味デ例外値ニナリマセン、即チ défant ガ 0 デス。Borel ノ意味ノ例外値デ défant ノ 0 トナル例ヲイクラデモ示シ得ルコトハ Valiron ノ既ニ述ベテヰル所デス。以下 Valiron ノ Lectures on the general theory of integral funct. ノ記号ニ従ツテ

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

ヲ整函数トシ

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$$

$$m(r)=\max|a_n|r^n$$

トスレバ

Lemma 1. (Valiron) 有限次ノ整函数ニ對シテハ、充分大キナ r ニ對シテ

$$m(r)<M(r)\leqq m(r)r^k$$

之カラ直チニ次ノコトガ出テ來マス。

Lemma 2. $f(z)$ ノ order ガ ρ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ、任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シ

$$\overline{\lim}\ n^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\infty$$

$$\lim\ n^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}|a_n|^{\frac{1}{n}}=0$$

(例ヘバ Bieberbach; Lehrbuch der Funkt. Bd. II)

次ノ如キ函数ヲ作ッテ見マス。(例ヘバ order ヲ 1 トシテ)

$$g(z)\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n_\lambda}\right)^{n_\lambda} \qquad n_{\lambda+1}=n_\lambda^3,\ \ n_1=2$$

之レハ Lemma 2 ニヨリ order 1。又 Lemma 1 ヨリ

(1) $\frac{n_\lambda}{e}<r<n_\lambda$

ニ對シテハ

(2) $|g(z)|<e^{r^{\frac{1}{3}+\varepsilon}}$

又 $h(z)$ ヲ order $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}\right)$ ノ整函数ニテソ

ノ零点ガ

$$\frac{n_\lambda}{e}-1<|z|<n_\lambda+1$$

ナル anneaux ノ suite ノ中ニナイ様ニ作リマスト、

Wiman ノ定理ノ正確ナ形ヨリ，(1) ナル anneaux ノ suite

ノ中デハ

(3) $|h(z)|>e^{r^{\frac{2}{5}-\varepsilon}}$

ヨリテ (2) ト (3) ヨリ (1) ノ中デハ

$$f(z)\equiv {g(z)}/{h(z)}$$

ハ uniformément ニ 0 ニ収斂シマス。$f(z)$ ノ pole ノ ordre réel ハ $2/5$ デスカラ、$f(z)$ ハ求メル函数デアリマス。

整函數 (order $< +\infty$) ノ Borel ノ例外値ハ漸近値ニナルコトハ既ニ証明済ミデアリマス。