373. 單一連結面分ノ *erreichbar* ナ境界点ノ次元

寺阪英孝（阪大）

S. Mazurkiewicz ノ論文[1]デ、解析函数ノ特異点ガアル *Metrik*（或ハ近傍系）ノ下ニ丁度 2-*dimensional* ニナルカ如何カガ問題トナッテ来マスガ、之レヲ実例ニヨッテ解決シヨウトシマシタラ、具合ノ悪イ集合ガ出テ来テウマク参リマセン。元ノ問題ニハ触レズニ、コノ集合ヲ下デ求メテミマセウ。結果ハ定理ノ形デ述ベレバ

$\boxed{\text{定理}}$ *erreichbar* ナ境界点ノ全体ガ 0-*dimensional* デアルヤウナ單一連結ナ面分ガ存在スル[2]。

コノ例ハ同時ニ次ノ定理ヲ與ヘマス。

---

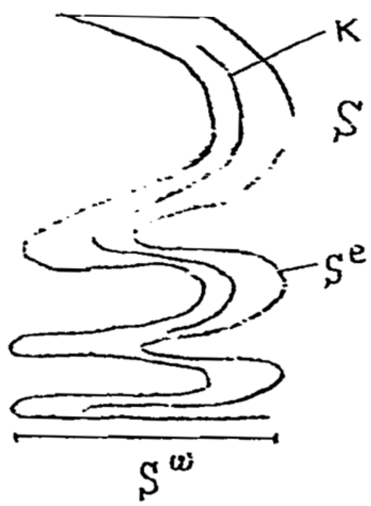
1) S. Mazurkiewicz: Sur les points singuliers d'une fonction analytique (Fund. Math. XVII, 1931)

2) 境界ガ一点ノミヨリ成立スル *tribial* ナ場合ヲ除ク。

$\boxed{\text{定理}}$ 集合Mノ任意ノ二点x, yヲ内外ニ分ツイカナル Jordan 曲線モMト共通点ヲ有スル如キ、0-dimensional ナ集合ガ平面上ニ存在スル。

§1.
$$
S^e \begin{cases} x=\sin\frac{1}{y}, & 0<y\leqq\frac{1}{2\pi} \\ x=\sin\frac{1}{y}+a, & 0<y\leqq\frac{1}{2\pi}\ (a>0) \\ 0\leqq x\leqq a, & y=\frac{1}{2\pi} \end{cases}
$$

$$S^\omega:\quad -1\leqq x\leqq 1+a,\ y=0$$



ナル曲線ヨリ成立スル圖形$S=S^e+S^\omega$ヲS図形トイヒ，Sニ囲マレタ有界両分ヲS^0，S^0ノ閉包ヲ単ニ$\bar{S}$デ表ハス。S^eハS^0ノ erreichbar ナ境界線，S^ωハ nicht erreichbar ナ境界線デアル。S^0ノ中ニ

$$K:\quad x=\sin\frac{1}{y}+\frac{a}{2}$$
$$0<y\leqq\frac{\theta}{2\pi}\ (0<\theta<1)$$

ナル曲線Kヲ入レルコトヲ、S圖形ニ切目ヲ入レルト云ヒ、KヲSノ切目ト云フ。

平面ノ topologisch ナ寫像ニヨル㊤コレラト等型ナ圖形ニ同ジ記号、同ジ名稱ヲ用ヒルコトトスル。

§2. 次ニ平行線

$$y=0,\quad y=\frac{1}{2\pi}$$

ノ間ニ

$$s_n:\ x=\sin\frac{1}{y}+\frac{n}{2}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\text{------})$$

ナル曲線ヲ入レ$(s_{2n},\ s_{2n+1})$ト平行線ノ一部トカラナルS

圖形ヲS_n，ソノ切目ヲk_nトスル。

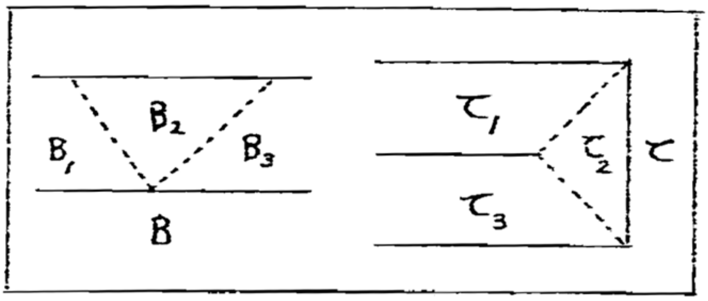
$y=0$，$y=1$ナル平行線間ノ面分ヲBトスレバ

$$B-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{S}_n, \qquad B-\sum_{n=-\infty}^{\infty}k_n$$

ハイヅレモ單一連結デ、$y=0$ナル直線ハソノ nicht erreichbar ノ境界線トナッテヰル。今三本ノ半直線

$$y=\pm\frac{1}{2\pi},\quad x\leqq\frac{1}{2\pi}$$

$$y=0,\quad x\leqq 0$$



ト線分

$$-\frac{1}{2\pi}\leqq y\leqq\frac{1}{2\pi},\quad x=\frac{1}{2\pi}$$

トカラ成ル図形τヲ圖ノヤウニ$\tau_1\tau_2\tau_3$ノ三部ニ分チ、又Bヲモ圖ノヤウニ$B_1B_2B_3$ニ三分シテ$\tau_1\tau_2\tau_3$ヲ夫々$B_1B_2B_3$ニ境界ヲモコメテ topologisch ニ對應セシメ、尚$\tau_1\cdot\tau_2$，$\tau_2\cdot\tau_3$ナル境界ガ夫々$B_1\cdot B_2$，$B_2\cdot B_3$ニ対應スルヤウニシテオケバ、コノ寫像ニヨツテB中ノs_n，k_nハτ中ノ同型ナ圖形σ_n，κ_nニ寫像サレル。

コノトキ

$$\tau-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}_n, \qquad \tau-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\kappa_n$$

ハ單一連結ノ面分デアッテτノ切目トモイフベキκ（即チ

$y=0,\ x\leqq 0$ ナル半直線）ハソノ nicht erreichbar ナ境界線デアル。

§3. <u>S ノ細分</u>. S 圖形 S ト上述ノてトノ間ニ topologisch ナ寫像ヲツクリ、S ノ切目 K がてノ切目 κ ニ對應スルヤウニシ、且ツ S ノ erreichbar ナ境界線 S^e がてノ境界ニ対應スルヤウニスレバ、コノ寫像デ σ_n, κ_n ニ對應スルモノヲ S_n, K_n トスルト

$$(1)\qquad S^0-\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{S}_n,\quad S^0-\sum_{-\infty}^{\infty}K_n$$

ハイヅレモ單一連結ナ面分デ、S ノ切目 K ハコノ双方ノ nicht erreichbar ナ境界線トナリ，

$$(2)\qquad K=\sum S_n^{\omega}$$

トカケル．（ココニ S_n^{ω} ハ §1 ノ意味デ S_n^0 ノ nicht erreichbar ナ境界線、以後同樣）

切目ノ入ッテヰル S 図形ニ斯樣ナ S_n, K_n ヲ入レルコトヲ <u>S ノ細分</u>トイフ。

§4. 以上ヲ元ニシテ求ムル面分 G ヲ作圖スル。ソノタメ最初ニ変換 $w=e^{\pi i z}$ ニヨツテ z 平面上ノ帯形 B ヲ w 平面ノ環形ニ寫像スルト、B 内ノ s_n, k_n ハ單位円 $Q: |w|<1$ 内ノ S 図形トソノ切目トニナル。コレヲ $S_{n_1}, K_{n_1}\ (n_1=1,2)$ トカク。ソウスレバ

$$(3)_1\qquad G_1=Q-\sum_{n_1=1}^{2}\overline{S}_{n_1}$$

(4)$_1$　$Q_1 = Q - \sum K_{n_1}$

ハイヅレモ單一連結ナ面分デQノ境界 B(Q) ハ双方ノ *nicht erreichbar* ナ境界線トナリ、次式ガ成立スル。

(5)$_1$　$B(Q) = \bar{Q} - Q = G_1^{\omega} = Q_1^{\omega} = \sum S_{n_1}^{\omega}$

次ニ S_{n_1} ヲ§3ノ方法ニ從ツテ細分シ、得ラレタS図形、切目ヲ $S_{n_1 n_2}$, $K_{n_1 n_2}$ $(n_2 = 0, \pm 1, \pm 2)$ デ表ハス。同様ニシテ一般ニ $S_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_{\nu-1}}$ カラ $S_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1} n_\nu}$, $K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1} n_\nu}$ 等ヲ求メ、次ノヤウニオク。

(3)$_\nu$　$G_\nu = Q_{\nu-1} - \sum\limits_{(n_1, \cdots n_\nu)} \bar{S}_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu}$　（$\sum$ ハスベテノ $n_1, n_2, \cdots\cdots n_\nu$ ニツイテノ和）

(4)$_\nu$　$Q_\nu = Q_{\nu-1} - \sum\limits_{(n_1, \cdots n_\nu)} K_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu}$

但シコノ際

(6)　$\delta(S_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu}) < \frac{1}{2^\nu}$

ノヤウニシテ置ク。（$\delta(M)$ ハMノ直径）、細分ノ性質カラ

(7)　$K_{n_1 \cdots\cdots n_\nu} \subset \overset{\circ}{S}_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1} n_\nu} \subset \overset{\circ}{S}_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}}$

(5)$_\nu$　$K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} = \sum S_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}^{\omega}$

§3. (1) ニ對スルKノ性質カラ $K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}}$ ハ $\overset{\circ}{S}_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} - \sum\limits_{n} \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1} n}$ ノ *nicht erreichbar* ナ境界線。ヨツテ又 G_ν 及ビ Q_ν ノ *nicht erreichbar* ナ境界線デモアル。

即チ

(8) $x \subset K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} \longrightarrow x \subset G_\nu^\omega,\ x \subset Q_\nu^\omega$

次＝ $G_{\nu+1} = Q_\nu - \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu n_{\nu+1}}$

$(4)_\nu$ ＝ヨリ

$$= (Q_{\nu-1} - \sum K_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}) - \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu n_{\nu+1}}$$

(7) ＝ヨリ

$$\supset (Q_{\nu-1} - \sum K_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}) - \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$$

同ジク (7) ＝ヨリ

$$= Q_{\nu-1} - \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$$

$$= G_\nu$$

ヨッテ

$$G_{\nu-1} \subset G_\nu$$

今 $$G = \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$$

トオケバ

$$G_\nu \subset G$$

又 $(3)_\nu$, $(4)_\nu$ ヨリ

$$G_\nu \subset Q_{\nu-1}$$

$$Q_\nu \subset Q_{\nu-1}$$

ヨッテ $m, n \geqq 1$ ＝対シ

$$G_m \subset Q_n$$

故＝又 $G \subset Q_\nu$

§5. $x \subset S^\omega_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ ナル任意ノ一点ヲ x ヲトレト

$(5)_\nu$ ＝ヨリ

$$x \subset K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} \quad (\nu = 1 \text{ ナラバ } x \subset B(Q))$$

故ニ (8) 及ビ (5), カラ $x \subset Q_\nu^\omega$ 及ビ $x \subset G_\nu^\omega$

然ルニ $G_\nu \subset G \subset Q_\nu$ ナル故

$$x \subset G^\omega$$

即チ

(9) $x \subset S^\omega_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ ナル点ハ G ノ *nicht erreichbar* ノ境界点デアル。 $(\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$

次ニ x ヲ

$$x \subset \bar{Q} - G$$

トスレバ

$$\begin{aligned} x \subset \bar{Q} - G = \bar{Q} - \sum G_\nu &\subset \bar{Q} - G_\nu \\ &= \bar{Q} - (Q_{\nu-1} - \sum \bar{S}_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu}) \\ &\subset \bar{Q} - Q_{\nu-1} + \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu} \end{aligned}$$

然ルニ $(4)_\nu$, (5), $(5)_\nu$ ヨリ

$$\begin{aligned} \bar{Q} - Q_{\nu-1} &= (\bar{Q} - Q) + (Q - Q_{\nu-1}) \\ &= \sum S^\omega_{n_1} + \sum K_{n_1} + \sum K_{n_1 n_2} + \cdots\cdots + \sum K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} \\ &= \sum S^\omega_{n_1} + \sum S^\omega_{n_1 n_2} + \cdots\cdots + \sum S^\omega_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu} \end{aligned}$$

依ツテ上式カラ x ハアル λ ニツキ

$$x \subset S^\omega_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\lambda}$$

トナルカ、然ラザレバ $x \subset S^e_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ 或ハ $x \subset S^o_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$

モシ $x \subset S^e_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ ダトスレバ $S^e_{n_1 \cdots\cdots n_\nu} \subset G_{\nu+1} \subset G$ トナルカラ、矛盾スル。ヨツテ

(10) $x \subset S^o_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$

デナケレバナラヌ。νハ任意デアルカラ、若シスベテノ$n_1\cdots\cdots n_\nu$, νニ對シテ $x \not\subset S^\omega_{n_1\cdots\cdots n_\nu}$ ナラバ、アラエルνニ對シテ (10) ガ成立スル如キ $n_1\cdots\cdots n_\nu$ ガナケレバナラヌ。然ルニ

$$S^0_{n_1\cdots\cdots n_\nu}\cdot S^0_{m_1\cdots\cdots m_\nu\cdots\cdots m_\lambda} \neq 0 \quad (\lambda \geqq \nu)$$

ガ成立スルノハ $n_1 = m_1, \cdots\cdots, n_\nu = m_\nu$ ノ時ニカギルカラ唯一ツ数列 $n_1, n_2, \cdots\cdots n_\nu$ ニ對シテ

$$x \subset S^0_{n_1} \qquad x \subset S^0_{n_1 n_2} \qquad x \subset S^0_{n_1\cdots\cdots n_\nu}\cdots\cdots$$

(6) カラ $\delta(S^0_{n_1\cdots\cdots n_\nu}) \longrightarrow 0 \quad (\nu\to\infty)$ ナル故

$$(11)\qquad x = \prod_{\nu=1}^{\infty} S^0_{n_1 n_2\cdots\cdots\cdots n_\nu}$$

斯ノヤウナxハGノ erreichbar ナ境界点デアル。
何者、$a_\nu \subset S^0_{n_1\cdots\cdots\cdots n_\nu}$ ナル a_ν 点ヲトリ出シ，両端ガ a_ν, $a_{\nu+1}$ ナル Jordanbogen b_ν デ（両端ヲ除キ）$\subset S^0_{n_1\cdots\cdots\cdots n_\nu} - \sum \overline{S}_{n_1\cdots\cdots\cdots n_{\nu+1}}$ ナルモノヲ考ヘレバ，$\sum b_\nu$ ハ $\longrightarrow x$ ナルG内ノ連続曲線ダカラデアル。

§6. §5ニヨリ $\overline{Q}-G$ ノ点ハGノ nicht erreichbar ナ境界点デアルカ又ハ (11) デ表ハサレルGノ erreichbar ナ点カデアルコトガ判ッタ。$\overline{G}-G \subset \overline{Q}-G$ ダカラ従ッテGノ境界点ハ上述ノモノデ盡キル。今

$$(12)\qquad \sum_{(n_1\cdots\cdots n_\nu\cdots)} \prod_{\nu=1}^{\infty} S^0_{n_1\cdots\cdots\cdots n_\nu}$$

ナル集合ヲ考ヘルト，コレハGノ境界ニ属スルカラ (12) ハG

ノ *erreichbar* ナ境界点ノ全体ト一致スルコトニナル。コノ集合ハ明カニ 0-*dimensional* ナル故，G が求ムル函数デアル。