# 368. 函數方程式ニ就イテ, IV

桶原満洲雄（北大）

§9. F(X) ガ完全連續ナ一次函數デ, λ=1 ガ固有値ナラバ

$$\Phi_\lambda(X) \equiv X - \lambda F(X) = x$$

ノ解ハ λ=1 ノ近傍デ

$$X = x - \lambda G_\lambda(x),$$

$$G_\lambda = \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda-1)^p A_p + \sum_{p=1}^{\mu} (\lambda-1)^{-p} B_p$$

ナル形ニ書ケル、但シ $A_p(x)$, $B_p(x)$ モ亦完全連続ナ一次函数デアル。

定理26. 「$M_\mu$ デ $A_p=0$, $N_\mu$ デ $B_p=0$」

$N_\mu$ デ考ヘレバ λ=1 ハ固有値デナイカラ $B_p=0$ トナルコトハ前回ニ注意シタ所デアル。λガ固有値デナイ時ニハ $\Phi_\lambda(M_\mu)=M_\mu$, $\Phi_\lambda(N_\mu)=N_\mu$ デアルコトニ注意スレバ $x \in M_\mu$ ナル時 $\Phi_\lambda(X)=x$ ヲ満足スル X ハ

$$X = -\frac{1}{\lambda-1}x + \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\Phi(x) \cdots\cdots + (-1)^\mu \frac{\lambda^{\mu-1}}{(\lambda-1)^\mu}\Phi^{\mu-1}(x)$$

ニ依ツテ與ヘラレルコトガ分ル。コレト $X = x - \lambda G_\lambda(x)$ ト比較スルコトニ依リ $A_p = 0$ ヲ得ル。

$$F + G_\lambda = \lambda F G_\lambda, \quad F + G_\mu = \mu F G_\mu$$

カラ簡單ナ計算デ

$$G_\lambda - G_\mu = (\mu-\lambda) G_\mu G_\lambda = (\mu-\lambda) G_\lambda G_\mu .$$

ヲ得ル。コノ關係ニ $G_\lambda$, $G_\mu$ ノ $\lambda=\mu=1$ ニ於ケル展開式ヲ入レテ係數ヲ比較スルコトニヨリ

$$B_{p+q-1} = B_p B_q$$

$$A_p B_q = B_p A_q = 0$$

$$A_{p+q+1}=A_pA_q$$

ヲ得ル、ソコデ

$$\bar{G}_\lambda=\sum_{p=0}^{\infty}(\lambda-1)^pA_p,\qquad \bar{\bar{G}}_\lambda=\sum_{p=1}^{\mu}(\lambda-1)^{-p}B_p$$

ト置ケバ，以上証明シタ所カラ

定理27. 「$G_\lambda=\bar{G}_\lambda+\bar{\bar{G}}_\lambda$, $\bar{G}_\lambda\bar{\bar{G}}_\mu=\bar{\bar{G}}_\mu\bar{G}_\lambda=0$, $M_\mu$デハ $\bar{G}_\lambda=0$, $\bar{\bar{G}}_\lambda=G_\lambda$; $N_\mu$ デハ $\bar{G}_\lambda=G_\lambda$, $\bar{\bar{G}}_\lambda=0$. $\lambda=1$ デ$\bar{G}_\lambda$ハ正則，$\bar{\bar{G}}_\lambda$ ハ $\lambda=1$ ヲ極トシテ持チ，其ノ他ノ点デハ（$\infty$ヲ含メテ）到ル所正則デアル」

コレト定理16トカラ

定理28. 「$X-\lambda\bar{F}(X)=0$ ノ解ハ $x-\lambda\bar{G}_\lambda(x)=X$ ニ依ッテ、$X-\lambda\bar{\bar{F}}(X)=x$ ノ解ハ $x-\lambda\bar{\bar{G}}_\lambda(x)=X$ ニ依テ与ヘラレル」

Riesz ノ〔13〕「$X-\lambda\bar{\bar{F}}(X)=x$ ノ固有値ハ $\lambda=1$ ダケデアル」ハ此ノ定理ノ一部分トシテ含マレテヰル。

§10. $B_1(E)=L$ トスレバ $B_1^2=B_1$ カラ $L$ ノ有界集合ガ緊ッテヰルコトガ分ル、従ッテ $L$ ハ有限ナ次元ヲ持ツ、故ニ

$$B_1(x)=\psi_1(x)\varphi_1+\cdots\cdots+\psi_n(x)\varphi_n$$

トナル。$\varphi_1,\cdots\cdots,\varphi_n$ ハ $L$ ニ属スル独立ナ点，$\psi_1(x),\cdots\cdots,\psi_n(x)$ ハ$E$デ完全連続且ツ互ニ独立ナ一次汎函数デ$N_\mu$ノ点デハ$0$トナル。

$B_1^2 = B_1$ カラ

$$\psi_j(\varphi_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

ヲ得ル。 $B_2 = B_1 B_2$ デアルカラ

$$B_2(E) \subseteqq B_1(E) = L$$

従ッテ

$$B_2(x) = \chi_1(x)\varphi_1 + \cdots\cdots + \chi_n(x)\varphi_n$$

トナル、更ニ $B_2 = B_2 B_1$ ナル関係ヲ使ヘバ

$$B_2(x) = \sum_{j,k} a_{jk}\psi_k(x)\varphi_j, \quad a_{jk} = \chi_j(\varphi_k)$$

ヲ得ル、一般ニ $B_{p+1} = B_p B_2 = B_2^p$ カラ

$$B_{p+1}(x) = \sum_{j,k} a_{jk}^{(p)}\psi_k(x)\varphi_j, \quad (a_{jk}^{(p)}) = (a_{jk})^p$$

ヲ得ル。 $B_\mu \neq 0,\ B_{\mu+1} = 0$ デアルカラ

$$(a_{jk})^\mu \neq 0, \quad (a_{jk})^{\mu+1} = 0$$

デアル。 $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_n$ ハ $L$ ニ属スル $n$ 個ノ独立ナ点デアレバヨイカラ、ソレヲ適当ニトルコトニヨリ行列 $(a_{jk})$ ヲ標準形トスルコトが出来ル。ソノ結果

$$B_2(x) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j-1}\psi_{k+1}^{(j)}(x)\varphi_k^{(j)}$$

$$B_{p+1}(x) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j-p}\psi_{k+p}^{(j)}(x)\varphi_k^{(j)}$$

トナル。但シ

$$\psi_{k+p}^{(j)}(x) = 0 \quad (k+p > m_j), \quad m_1 + \cdots\cdots + m_r = n$$

デアル。（以上ノ計算ハ大体 *Lalesco, Introduction à la théorie des équations intégrales, Chap.* II. ニヨル。）コレデ $B_1, \cdots\cdots, B_\mu$ ノ構造ガ分ッタ。

§11. $\Phi^p B_1 = F^p B_{p+1}$ ナル関係カラ

$$\sum_j \sum_k \psi_k^{(j)}(x) \Phi^p(\varphi_k^{(j)}) = \sum_j \sum_k \psi_{k+p}^{(j)}(x) F^p(\varphi_k^{(j)})$$

ヲ得ル。$n$ 個ノ $\psi_k^{(j)}(x)$ ガ一次的ニ独立デアルカラ

$$\Phi^p(\varphi_k^{(j)}) = F^p(\varphi_{k-p}^{(j)})$$

トナル。但シ $k \leqq p$ ノトキ $\varphi_{k-p}^{(j)} = 0$ デアル。故ニ

$$\Phi^p(\varphi_k^{(j)}) = 0 \qquad (p \geqq k)$$

ヲ得ル、コレハ $\varphi_p^{(j)} \in M_p$ ナルコトヲ示ス。$\varphi_p^{(j)}$ ガ $M_{p-1}$ ニ属シナイコトガ証明サレタトスレバ

$$\Phi(\varphi_{p+1}^{(j)}) = F(\varphi_p^{(j)})$$

従ッテ

$$\Phi^p(\varphi_{p+1}^{(j)}) = F(\Phi^{p-1}(\varphi_p^{(j)})) = \Phi^{p-1}(\varphi_p^{(j)}) \neq 0$$

ヲ得ルカラ $\varphi_{p+1}^{(j)}$ ハ $M_p$ ニ属シナイ、依ッテ $\varphi_p^{(j)}$ ハ $M_p$ ニ属シ $M_{p-1}$ ニ属シナイ点デアル、特ニ $\varphi_1^{(1)}, \cdots\cdots, \varphi_1^{(r)}$ ハ $M$ ノ点デアル。

逆ニ $\varphi \in M$ トスル。

$$\varphi - F(\varphi) = 0, \quad \varphi - \lambda F(\varphi) = \xi$$

カラ $(1-\lambda)\varphi=\xi$ ヲ得ル。一方ニ於テ $\varphi=\xi-\lambda G_\lambda(\xi)$ デアルカラ

$$\varphi=B_1(\varphi)+(\lambda-1)^{-1}B_2(\varphi)+\cdots\cdots+(\lambda-1)^{-\mu+1}B_\mu(\varphi)$$

ガ勝手ナ入ニ對シテ成立スル、依テ

$$\varphi=B_1(\varphi),\quad B_2(\varphi)=\cdots\cdots=B_\mu(\varphi)=0$$

ヲ得ル、コレカラ $\varphi$ ガ $\varphi_1^{(1)},\cdots\cdots,\varphi_1^{(r)}$ ノ一次式トシテ表ハサレルコトヲ知ル。一般ニ歸納法ニ依ッテ $M_p$ ノ点ハ

$$\varphi_k^{(j)}\qquad (k=1,2,\cdots\cdots,p;\quad j=1,2,\cdots\cdots,r)$$

ノ一次式トシテ表ハサレルコトガ証明サレル、故ニ $B_1,\cdots\cdots\cdots\cdots,B_\mu$ ヲ知ルコトニ依テ $M_1,\cdots\cdots,M_\mu$ ガ求マル。