365. 相對微分幾何ニツイテ

松村宗治（台北大）

相對微分幾何ニツイテハ次ノ關係成立スルコトハ人ノヨク知ル所デアル。

$$(1)\qquad \frac{ds}{d\sigma}=\rho=\frac{d\bar{s}(\mathfrak{F})}{d\bar{s}(\mathfrak{U})}$$

詳細ハ日本數學輯報第四卷，p. 59 ニ於ケル Süss 君ノ論文參照セラルベシ。

此式(1)ヲ少シク下ニ取扱フコトニスル、直角座標ヲ用ヒル、ソウスルト

$$(2)\qquad \begin{cases} d\bar{S}(\mathfrak{U})=\sqrt{dx^2+dy^2} \\ d\bar{S}(\mathfrak{F})=\sqrt{du^2+dv^2} \end{cases}$$

トスルコトが出來ル、卵形線 $\mathfrak{U}$ 上ニ一点ヲトレバ $\mathfrak{F}$ 上ノ点が定マル、何トナレバ平行法線が相對應シテオルカラデアル、

ツマリ、u, v ハ x, y ノ函数デアルカラ

(3) $du = u_x dx + u_y dy$

トオクヲ得、dv ニツイテモ同様デアル。

ソコデ

(4) $\{d\bar{s}(\varphi)\}^2 = E_{11} dx^2 + 2E_{12} dx dy + E_{22} dy^2$

トナル、但シ

(5) $E_{11} = u_x^2 + v_x^2, \cdots\cdots$

デアル。

今

(6) $\rho^2 = R$

トオクト

(7) $R = \dfrac{E_{11} dx^2 + \cdots\cdots}{dx^2 + dy^2}$

トナル、次ニ R ノ *Stationary value* ヲ求メンニ R ノ極値ニ向ッテハ下式ガ成立スル、コレデ R ハ x, y ノ函数トミルノデアル。

(8) $\begin{cases} E_{11} dx + E_{12} dy = R\, dx, \\ E_{21} dx + E_{22} dy = R\, dy, \quad (E_{12} = E_{21}) \end{cases}$

ソコデ (8) 式ヨリ dx, dy ヲ消去セバ

(9) $\begin{vmatrix} E_{11} - R & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} - R \end{vmatrix} = 0$

トナル。ツマリ R ノ二次式ガ一般ニ得ラルルコトニナル、

此ノRノ二ツノ根ガ相異ナルモノトシ、ソレヲ新ニ R, ρ トスルト次ノ關係ヲ (5) ヨリ誘導スルコトガ出來ル。

$$(10)\quad dx(\rho\,\delta x)+dy(\rho\,\delta y)=R(dx\,\delta x+dy\,\delta y)$$

或ハ

$$(11)\quad (\rho-R)(dx\,\delta x+dy\,\delta y)=0$$

ヲ得、コヽニ $dx, dy;\ \delta x, \delta y$ ハRノ二次方程式(9)ノ根ニ對應スルモノトスル。

サテ(11)ニテ $\rho \neq R$ トスルカラ考フル二方向ハ互ニ垂直ニナツテイルコトガ分ル。

ツマリ相對的曲率半徑ノ極値ヲ與フル方向ハ互ニ垂直デアルコトヽナル。

(9)ガ dx, dy ヨリ independent ナラバRハ常ニ u 曲線ヨリ無関係ニナル、ツマリ相對的曲率ハ常ニ u 曲線ヨリ無關係ニナル。

而シテ其必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

$$(12)\quad E_{11}=E_{22}=E,\qquad E_{12}=0$$

トナルコトガ分ルノデアル。

ソレヲ見ルニハ dx, dy ニ特別ノ値ヲ與ヘレバヨイノデアル。

尚亦(9)ニ(6)ヲ代入セバ ρ ノ四次式ガ得ラレルカラ相對的曲率半徑ノ極値ハ一般ニ四ツノ場所デ起リ得ルコトニナル、ソシテ極大, 極小ガ交互ニ存在ス。

尚(7)ヲ一般ニシテ

$$R=\frac{g_{ik}\,du^i\,du^k}{e_{ik}\,du^i\,du^k}$$

但シ

$$e_{ik}=\begin{cases}1, & (i=k)\\ 0, & (i\neq k)\end{cases}$$

ヲ考ヘルト(9)ハRノn次整式ニナル、ソシテ上ト同様ニイヘル。