362. 函數方程式ニ就イテ, VIII

福原満洲雄(北大)

§6. 今迄ノ記号ハソノマヽ使フコトニスル、Aガ一次閉集合デアルトキ $A(X)$ ヲ簡単ニ X^A デ, 商空間 E/A ヲ E^A デ表ハス。

$\Phi(A) \geqq A$ ナラバ $F(A) \geqq A$, 逆ニ $F(A) \geqq A$ ナラバ $\Phi(A) \geqq A$ トナルコトハ明カデアル、次ニ $\Phi(A) \geqq A$ ノ場合ヲ考ヘル、X_1, X_2 ガ共ニ $A(X)$ ノ点ナラバ $F(X_1)-F(X_2) \in A$ トナルカラ

$$F^A(X^A) = F(X)^A$$

ニ依ッテ E^A デ定義サレタ一次函数 $F^A(X^A)$ ヲ得ル、$F(X)$ ガ完全連続ナラバ $F^A(X^A)$ モ完全連続デアル、方程式

$$(1) \quad \Phi(X) \equiv X - F(X) = 0$$

$$(2) \quad \Phi(X) \equiv X - F(X) = x$$

カラ M, N ヲ定義シタヤウニ

$$(3) \quad \Phi^A(X^A) \equiv X^A - F^A(X^A) = 0^A$$

$$(4) \quad \Phi^A(X^A) \equiv X^A - F^A(X^A) = x^A$$

カラ M^A, N^A ヲ, モット一般ニ M_n, N_n ト同ジヤウニ M_n^A, N_n^A ヲ定義スル, ソノトキ

定理19. 「$\Phi(A) \geqq A$ ナラバ $M_n^A \geqq (M_n + A)/A$, $N_n^A \geqq (N_n + A)/A$, $\Phi(A) = A$ ナラバ $M_n^A = (M_n + A)/A$, $N_n^A = N_n/A$」

コレハ後デ使ハナイカラ証明ハ省ク。

§7. 扨テ補助変数λヲ含ム方程式

(5) $\Phi_\lambda(X) \equiv X - F(X,\lambda) = 0$

(6) $\Phi_\lambda(X) \equiv X - F(X,\lambda) = x$

ヲ考ヘヨウ. $F(x,\lambda)$ ハxニ関シテハ完全連続ナ一次函数, λニ関シテハ λ_0 デ一様ニ連続(即チ勝手ナ正ノ数εニ對シテ正ノ数δヲ適當ニ取ッテ $\|x\| \leqq 1$, $\|\lambda-\lambda_0\| \leqq \delta$ ナル時

$$\|F(x,\lambda)-F(x,\lambda_0)\| < \varepsilon$$

トスルコトガ出来ル)トスル. λハ一般ニ或線状D空間ノ点デアル。

記号ガ複雑ニナルノヲ避ケルタメ

$$F(x,\lambda_0)=F(x)$$

トスル. λ=(一定)トシタトキ (5)ヲ満足スルXノ集合ヲ$M(\lambda)$, (6)ガ解ヲ持ツヤウナxノ集合ヲ$N(\lambda)$, 同ジヤウニ $M_n(\lambda)$, $N_n(\lambda)$ヲ定義スル。

$\lambda_j \to \lambda_0$, $\{x_j\}$ガ有界ナラバ $\{F(x_j,\lambda_j)\}$ガ緊ッテヰルコトニ注意スレバ次ノ定理ヲ得ル。

定理20. 「λガλ_0ニ十分ニ近イトキ $M_n(\lambda) \leqq M_n$ トナル」

Mガ0ダケヲ含ムナラバ $M_n(\lambda) \leqq M_n$ カラ $M(\lambda)$ モ0ダケヲ含ムコトニナリ、従ッテ $N(\lambda)=E$トナル。

定理21. 「(1)ヲ満足スルXガ0ニ限ルナラバλガλ_0ニ十分ニ近イトキ (6)ハ勝手ナxニ對シテ常ニ唯一ツノ解ヲ持

ツ。」

(6)ノ解ヲ

$$\Psi(x,\lambda)\equiv x-G(x,\lambda)=X$$

ト書クコトニスル。

定理22.「(1)ヲ満足スルXガ0ニ限ルナラバ$G(x,\lambda)$ハxニ関シテ完全連続ナ一次函数，λニ関シテλ_0デ一様ニ連続ナ函数デアル」

xニ関スル性質ハ定理18ノ結果デアル、λニ関スル性質ハ帰謬法デ証明サレル。

$F(x,\lambda)$ガλ_0デ微分出来ルトハ$F(x,\lambda)$ガ

$$F(x,\lambda)=F(x,\lambda_0)+F'(x,\lambda-\lambda_0)+\Delta(x,\lambda-\lambda_0)$$

ナル形ニ書ケルコトヲ意味スル、但シ$F'(x,\lambda)$ハ$\|x\|\leqq 1$，$\|\lambda\|\leqq 1$デ完全連続ナ，λニ関シテ一次ノ函数デ，$\Delta(x,\lambda)$ハ$\|x\|\leqq 1$デ一様ニ

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\|\lambda\|}\Delta(x,\lambda)=0$$

ガ成立スル函数デアル。

定理23.「$F(x,\lambda)$ガλ_0デ微分出来，(1)ヲ満足スルXガ0ニ限ルナラバ，$G(x,\lambda)$モλ_0デ微分出来ル」

コレハ定理5(II)ノ特別ナ場合ニ過ギナイ。コノ場合ニハ(6)ノ解ガ唯一ツデアルコトガ分ツテキルカラ証明ハ更ニ楽ニナル。

§8. 特ニλガ

$$(7)\quad \Phi_\lambda(X)\equiv X-\lambda F(X)=0$$

$$(8)\quad \Phi_\lambda(X)\equiv X-\lambda F(X)=x$$

ナル形ヲ持ツ場合ヲ考ヘヨウ。λハ実数又ハ複素数或ハ多元数体ニ属スル数（可換デアル必要ハナイ）トシテモヨイガ、徒ラニ理論ヲ複雑ニスル嫌ヒガアルカラ後ノ便宜上λハ複素数トキメテオク。λトEノ点xノ積ニ関シテハλガ複素数ノ時ニモλxガ一通リニ定義サレ

$$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x,\quad \lambda x+\mu x=(\lambda+\mu)x,$$

$$\lambda x+\lambda y=\lambda(x+y)$$

等ヲ假定スルガ，$\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ハλガ実数ノトキダケ假定シ，一般ニλガ複素数ノ場合ニハ

$$\|\lambda x\|\leqq K|\lambda|\cdot\|x\|$$

トナルヤウナλ, xニ関係シナイKガ存在スルモノト假定スルダケデヨイ、又$F(x)$ガ一次函数デアルトイフトキニハλガ複素数ノ場合ニモ$\lambda F(x)=F(\lambda x)$トナルコトヲ假定スル、若シ実数トEノ点ノ積ガ定義サレテヰルダケナラバ虚單位iヲ導入シテ

$$F(x+iy)=F(x)+iF(y)$$

ニ依テ$F(x)$ヲ空間$E+iE$ニ於テ定義シ，(7), (8)ヲ$E+iE$ニ於ケル方程式ト考ヘレバヨイ。

定理24.「有限ナ固有値ハ孤立シテヰル」

コレハ己ニ証明ズミデアル（VII, §4）．(8)ノ解ヲ

$$\Psi_\lambda(x)\equiv x-\lambda G_\lambda(x)=X$$

ト書ク、定理23ニ依リ $G_\lambda(x)$ ハ固有値以外ノ点デハ入ノ正則函数デアル、従ッテ固有値ノ近傍デ $G_\lambda(x)$ ハ Laurent 級数ニ展開サレル、簡単ノタメ $\lambda=1$ ヲ固有値トシ, Laurent 級数ヲ

$$G_\lambda(x)=\sum_{p=0}^{\infty}(\lambda-1)^p A_p(x)+\sum_{p=1}^{\infty}(\lambda-1)^{-p}B_p(x)$$

トスル、$A_p(x)$, $B_p(x)$ ガ完全連続ナ一次函数デアルコトハ、ソノ積分表示カラ分ル。

$$(E-\lambda\mathbb{F})(E-\lambda G_\lambda)=(E-\lambda G_\lambda)(E-\lambda\mathbb{F})=E$$

カラ

$$(9)\qquad \mathbb{F}+G_\lambda=\lambda\mathbb{F}G_\lambda=\lambda G_\lambda\mathbb{F}$$

ヲ得ル、$\mathbb{F}G_\lambda=G_\lambda\mathbb{F}$ カラ

$$A_p\mathbb{F}=\mathbb{F}A_p,\quad B_p\mathbb{F}=\mathbb{F}B_p$$

従ッテ $\quad A_p\Phi=\Phi A_p,\quad B_p\Phi=\Phi B_p$

ヲ得ル、又(9)ニ G_λ ノ展開式ヲ入レ $(\lambda-1)^{-p}$ ノ係数ヲ比較スルコトニヨリ

$$\Phi B_p=\mathbb{F}B_{p+1}\qquad(p=1,2,\cdots\cdots)$$

従ッテ

$$(10)\qquad \Phi^{p+q}B_s=\Phi^p\mathbb{F}^qB_{q+s}\qquad(s=1,2,\cdots\cdots;\ p,q=0,1,2,\cdots\cdots)$$

ヲ得ル。

$\Phi(N_\mu)=N_\mu$ デアルカラ $\mathbb{F}(N_\mu)\supseteq N_\mu$ 従ッテ(8)ヲ N_μ ニ於ケル方程式ト考ヘルコトが出来ル。(1)ヲ満足スル N_μ ノ点 X ハ O ニ限ルカラ N_μ ニ於テ考ヘレバ $\lambda=1$ ハ固有

値デナイ、故ニ $\Phi_\lambda(x)$ ハ N_μ デ考ヘレバ $\lambda=1$ デ正則トナル、即チ

$$B_p(x)=0 \qquad (x\in N_\mu,\ p=1,2,\cdots\cdots)$$

$\Phi^\mu(E)=N_\mu$ デアルカラ，コレハ

$$\Phi^\mu B_p=B_p\Phi^\mu=0 \qquad (p=1,2,\cdots\cdots)$$

ト書イテモ同じコトデアル、コレト(10)トカラ

$$\Phi^{\mu-q}F^q B_t=0 \qquad (t=\mu+1,\cdots\cdots;\ q=0,1,\cdots\cdots,\mu)$$

ヲ得ル、所ガ $\Phi+F=E$ デアルカラ

$$\Phi^\mu+{}_\mu\Phi^{\mu-1}F+\cdots\cdots+F^\mu=(\Phi+F)^\mu=E$$

トナルコトニ注意スレバ $p>\mu$ ノトキ $B_p=0$ ヲ得ル。

G_λ ガ固有値ニ於テ正則トナリ得ナイコト，(8) ヲ $N_{\mu-1}$ ニ於ケル方程式ト考ヘテモ $\lambda=1$ ハ固有値デアルコト，及ビ

$$\Phi^{\mu-1}B_1=\Phi^{\mu-2}FB_2=\cdots\cdots=F^{\mu-1}B_\mu$$

ニ注意スレバ E ニ於テ $B_1,B_2,\cdots\cdots,B_\mu$ ハ皆 0 デナイコトガ分ル、依ツテ

定理25.「固有値 $\lambda=1$ ハ G_λ ノ μ 位ノ極デアル」

従ツテ G_λ ハ λ ノ有理型函数デアル。

(注意) 定理16〔10〕，17〔11〕ハ便利ナ定理デアルガソレヲ使フノヲ避ケタ、ソレヲ使フコトノ利益ハ問題ヲ有限次元ノ空間ニ持来スコトガ出来ル所ニアル、併シソレデハ証明ノ方針ガソコデ急激ナ変化ヲ受ケタコトニナリ、ドウモ満足出来ナカツタノデアル。

コヽマデ来レバ南雲氏ガ注意サレタ如ク $B_1,\cdots\cdots,B_\mu$ ノ

構造ヲ調ベルコトモ容易トナルガ更ニソレラト$M_1, \cdots\cdots, M_\mu$及ビ定理16, 17ニ現ハレル$\overline{F}$, $\overline{\overline{F}}$等トノ関係ヲ次回ニ於テ明カニシタイト思フ。