356. 連続群ノ Metrisation ニ就イテ

角谷静夫（阪大）

Topologische kontinuierliche Gruppe G ガ kompakt デ 1es abzählbarkeitsaxiom ヲ満足シテオレバ G ガ separabel デアルコトハ前ニ（紙上談話會78号346）小松氏ト一緒ニ証明シマシタガ更ニ一般ニ次ノ定理ガ成立シマス。

定理 Topologische kont. Gruppe G ガ metrisierbar デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ G ガ 1es abzählbarkeitsaxiom ヲ満足スルコトデアル。シカモ Metrik ρ ハ

$$\rho(x, y) = \rho(zx, zy)$$

トナルモノヲトルコトガ出來ル。[1)]

---

1) 近藤氏ノ結果（東北数学雑誌三十七巻）ヲ用ヒルト G ガ 2es Abzählbarkeitsaxiom ヲ満足シテオレバ

$$\rho(zx, zy) = \rho(x, y)$$

ナル Metrik ヲツケルコトガ出來ルコトガ容易ニワカリ又 Urysohn-Alexandroff ノ結果（C. R. t. 177, 1923）ヲ用ヒルト G ガ 1es abzählbarkeitsaxiom ヲ満足シヲ居レバ metrisierbar デアルコトガ容易ニワカル。

空間ガ *kompakt* デ *metrisch* デアレバ *separabel* ニナルカラ、コノ定理ハ前ノ結果ヲ含ムコトハ明カデアル。

証明: *Einheitselement* e ノ近傍系 $\{U_{\frac{1}{2^n}}\}$ $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ ヲ

$$U_1 \supset U_{\frac{1}{2}} \supset U_{\frac{1}{4}} \supset \cdots\cdots \supset U_{\frac{1}{2^n}} \supset \cdots\cdots \ni e$$

$$U^2_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{1}{2^{n-1}}}, \qquad U^{-1}_{\frac{1}{2^n}} = U_{\frac{1}{2^n}}$$

ナル如ク取リ

$$U_{\frac{3}{4}} = U_{\frac{1}{2}} \cdot U_{\frac{1}{4}}$$

一般ニ

$$U_{\frac{2m+1}{2^n}} = U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

トオケバ U_r ハ $r=\frac{k}{2^n}$ $(1 \leqq k \leqq 2^n,\ n=0,1,2,\cdots\cdots)$ ニ對シテ定義サレテ $1 \leqq k \leqq 2^n-1,\ n=0,1,2,\cdots\cdots$ ニ對シテ

$$U_{\frac{k}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{k+1}{2^n}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ヲ満足スル。コレハ k ガ偶数ナルトキハ $U_{\frac{k+1}{2^n}}$ ノ定義ヨリ明カデアルシ k ガ奇数 $2m+1$ デアレバ

$$U_{\frac{2m+1}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} = U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

トナリ右辺ハ $n-1$ ノトキニ既ニ(2)ガ成立スルトスレバ $\subset U_{\frac{m+1}{2^{n-1}}} \equiv U_{\frac{(2m+1)+1}{2^n}}$ トナル。$n=1$ ノトキハ (2) ハ明カニ成立スルカラ数学的帰納法ニヨリ $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ ニ對シテ成立スル。

次ニ $f(x)$ ヲ

$$f(e)=0,$$

$x \neq e$ ナルトキハ

$$f(x)=\{x \in U_r \text{ ナル如キ } r \text{ ノ上限}\}$$

トオク。(但シ r ハ $\frac{k}{2^n}$, $1 \leqq k \leqq 2^n$, ナル如キモノヲ考ヘルモノトスル。従ッテ $x \in U_1$ ナラバ $f(x)=1$)。コノ $f(x)$ ヲ使ッテ $\rho(x, y)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$\rho(x, y)=\underset{\xi \in G}{\mathrm{O \cdot G}}\,|f(\xi x)-f(\xi y)|.$$

コノ $\rho(x, y)$ ガ距離ノ三公準及ビ $\rho(zx, zy)=\rho(x, y)$ ヲ満足スルコトハ明カデアルカラコノ $\rho(x, y)$ ニヨル近傍系ガ初メノ近傍系ト äquivalent デアルコトヲ証明スル。

(1) $\varepsilon>0$ ヲ任意ノ正数トスルトキ正整数 $n=n(\varepsilon)$ ガ定マッテ $x^{-1}y \in U_{\frac{1}{2^n}}$ ナラバ $\rho(x, y) \leqq \varepsilon$ トナル。

証明: $n=n(\varepsilon)$ ヲ $\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}$ ナル如クトル。任意ノ ξ ニ對シテ $f(\xi x)<\frac{k}{2^n} \leqq f(\xi x)+\frac{1}{2^n}$ ナル如キ $k=k(\xi, n)$ ガ存在スル。f ノ定義ヨリ $\xi x \in U_{\frac{k}{2^n}}$, ヨッテ

$\xi y = \xi x \cdot x^{-1} y \in U_{\frac{k}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{k+1}{2^n}}$, コレヨリ

$f(\xi y) \leqq \frac{k+1}{2^n} \leqq f(\xi x) + \frac{2}{2^n} < f(\xi x) + \varepsilon$ ヲ得ル。

$x^{-1}y \in U_{\frac{1}{2^n}}$ ハ $y^{-1}x \in U_{\frac{1}{2^n}}$ ト同等デアルカラ x, y ヲ入レカヘレバ $f(\xi x) < f(\xi y) + \varepsilon$ ヲ得ル。故ニ

$$|f(\xi x) - f(\xi y)| < \varepsilon$$

トナル。ξ ハ任意デアツタカラ $\rho(x, y) \leqq \varepsilon$.

(2) N ヲ任意ノ（十分大キイ）正整数トスルトキ，$\delta = \delta(N)$ ガ定マッテ $\rho(x, y) < \delta$ ナラバ $x^{-1}y \in U_{\frac{1}{2^N}}$（コレハ $y^{-1}x \in U_{\frac{1}{2^N}}$）トナル。

証明：$\delta = \frac{1}{2^N}$ トスレバ

$$|f(x^{-1}y)| = |f(e) - f(x^{-1}y)| \leqq \rho(e, x^{-1}y)$$
$$= \rho(x, y) < \delta = \frac{1}{2^N}$$

トナリ，f ノ定義ヨリ $x^{-1}y \in U_{\frac{1}{2^N}}$ トナルコトハ明カデアル。

（定理ノ証明終）

Danzig (*Math. Ann. Bd. 107*) ハ *Topologische kont. Gruppe* G ニ對シテ

$$\rho(x, y) = \rho(zx, zy) = \rho(xz, yz)$$

ナル *Metrik* ガ導入出來ルタメノ必要十分條件ヲ與ヘテオリマスガ、コノ樣ナ *Metrik* ハ

$$\rho(e, x) = \rho(e, t^{-1}xt)$$

ヲ滿足シマスカラ；$x \neq e$ ナル Element x ヲ t ニテ変換シタモノ $t^{-1}xt$ 全体ノ集合ガ e ヲ集積点ニ持ツヤウナ Gruppe ニ對シテハ、カヽル Metrik ハ導入出來ナイ。

例ヘバ

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ [2)]

デアルカラ Matrizengruppe ニハカヽル Metrik ハ導入出來ナイ。

シカシ片側ダケノ関係

$$\rho(zx, zy) = \rho(x, y)$$

ヲ滿足スル Metrik ハ存在スル。例ヘバ $A = (a_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ ニ對シテ

$$\|A\| = \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|$$

トオキ

$$\rho(A, B) = \log\{1 + \|A^{-1}B - E\| + \|B^{-1}A - E\|\}$$

トオケバヨイ。

$$\rho(A, A) = 0; \quad \rho(A, B) > 0 \qquad A \neq B$$

$$\rho(A, B) = \rho(B, A), \quad \rho(CA, CB) = \rho(A, B)$$

ナルコトハ明デアルカラ三角不等式

---

2) コノ例ハ淺野氏ニ教ヘテイタダキマシタ。

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqq \rho(A, C)$$

ヲ証明ショウ。 $\|A\|$ ノ定義ヨリ

$$\|P \cdot Q\| \leqq \|P\| \cdot \|Q\|$$

$$\|P + Q\| \leqq \|P\| + \|Q\|$$

デアルカラ

$$\|A^{-1}C - E\| = \|(A^{-1}B - E)(B^{-1}C - E) + (A^{-1}B - E) + (B^{-1}C - E)\|$$

$$\leqq \|A^{-1}B - E\| \cdot \|B^{-1}C - E\| + \|A^{-1}B - E\| + \|B^{-1}C - E\|$$

同様ニ

$$\|C^{-1}A - E\| \leqq \|C^{-1}B - E\| \cdot \|B^{-1}A - E\| + \|C^{-1}B - E\| + \|B^{-1}A - E\|$$

コレラノ二式ト $\rho(A, B)$ ノ定義ヨリ求ムル不等式ヲ得ル。