351. 函數方程式ニ就テ, VI

福原 満洲雄（北大）

函数方程式ヲ一般的ニ論ズルニハ、ドウシテモFredholmノ積分方程式ノ理論ヲ完全ニ抽象化シテ置クコトガ重要デアル。

ソレガ已ニ満足ナ程度ニ出來テ居ル（南雲氏，積分方程式ノ抽象的考察ニ就イテ，参照．本紙ヲ通ジテ種々未知ノ事柄ニツイテ教ヘラレル所ガ多イノハ仕合セデス）、併シソノ先ヘ進マウトスルニハ此レ等ノ結果ヲ自分ノ力デ整理シ，自分ノモノトシテカラデナイト，借リ物デハ自由ニ使ヒコナセナイ、ソレデ蛇足ノヤウデハアルガ一先ヅ今迄ノ結果ヲマトメテ置キタイト思フ。Rieszノ論文（Acta Math. 1918）ト比較對照ノ便宜上ソノ定理番号ハ〔 〕ノ中ノ数字デ表ハスコトニシタ。

§1. 本論ニ入ル前ニコレカラ使フ記号ニツイテ述ベテ置ク。

EハEハ完備シタ線状D空間，$\mathfrak{F}(X)$ハEデ定義サレタ完全連續ナ（vollstetig）一次函数

(1) $$\Phi(X)\equiv X-\mathfrak{F}(X)=0$$

ヲ満足スルXノ集合ヲM,

(2) $$\Phi(X)\equiv X-\mathfrak{F}(X)=x$$

ガ解ヲ持ツxノ集合ヲN，モット一般ニ

(3)　　$\Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = 0$

ヲ満足スルXノ集合ヲM_n,

(4)　　$\Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = x$

ガ解ヲ持ツxノ集合ヲN_nトスル．$\Phi^0(X)$, $\Phi^1(X)$ハ夫々 X, $\Phi(X)$ヲ表ハスモノトスレバ$M_1 = M$, $N_1 = N$, M_0ハ0ダケカラ成ル集合，$N_0 = E$デアル。

二ツノ集合A,BガアルトキA+BデAノ点トBノ点ノ和トシテ表ハサレル集合ヲ，λA（λハ実数）デλトAノ点ノ積トシテ表ハサレル集合ヲ，A,Bノ和集合，積集合ハソレゾレ$A \cup B$, $A \cap B$デ表ハスコトニスル．又Bガ一点xダケカラ成ル場合ニハA+Bノ代リニ$A(x)$ト書ク．Aガ一次閉集合ナラバ$A(x)+A(y)=A(x+y)$, $\lambda A(x) = A(\lambda x)$デ，且ツ

$$\|A(x)\| = \underset{X \in A(x)}{\text{borne inf.}} \|X\|$$

ニ依ツテ$\|A(x)\|$ヲ定義シタトキ$A(x)$ノ全体ガ完備シタ線状D空間トナル、コレヲE/Aデ表ハシ商空間ト名ヅケル(功力氏，抽象空間論，197頁)

§2.　定理1〔1〕「Mハ有限ナ次元ヲ持ツ一次空間デアル」

Mガ閉デアルコトハ$F(X)$ノ連続性ノ結果デアル、Mガ有限ナ次元ヲ持ツコトハ$M = F(M)$デアルカラRieszノ定理ノ結果デアル。

注意：　Mが有限ナ次元ヲ持ツカラ $\|M(x)\| = \|X\|$ トナルヤウナXガ $M(x)$ ノ中ニ存在スル。

定理２〔5〕　「Nハ一次閉集合デアル」

$x_j \in N$, $x_j \to x$ ナラバ $\Phi(X_j) = x_j$, $\|X_j\| = \|M(X_j)\|$ $(= \rho_j)$ ナル X_j ガ存在スル. $\{X_j\}$ ガ有界ナラバ初メカラ適當ナ部分列ヲ取ルコトニヨリ $F(X_j) \to Y$ ト假定スルコトガ出來ル。

ソノ時 $X_j \longrightarrow Y + x$ トナルカラ $X = Y + x$ ト置ケバ $\Phi(X) = x$ 即チ $x \in N$ ヲ得ル. $\{X_j\}$ ガ有界デナケレバ初メカラ適當ナ部分列ヲ取ルコトニヨリ $\rho_j \longrightarrow \infty$ ト假定スルコトガ出來ル。

$X_j = \rho_j Y_j$ ト置ケバ $\|Y_j\| = \|M(Y_j)\| = 1$ トナル.

$\{Y_j\}$ ハ有界デアルカラ $F(Y_j) \longrightarrow Y$ ト假定シテヨイ。

$x_j/\rho_j \longrightarrow 0$ デアルカラ $Y_j \to Y$ トナリ $\Phi(Y) = 0$, $\|M(Y)\| = 1$ ヲ得ル、從ッテ $\Phi(X) = 0$ ガMニ屬シナイYデ滿足サレルコトニナリ矛盾デアル。

定理３〔2〕　「$M_0 \subset M_1 \subset \cdots\cdots \subset M_\mu = M_{\mu+1} = \cdots\cdots$ トナルヤウナ μ ガ存在スル」

定理４〔6〕　「$N_0 \supset N_1 \supset \cdots\cdots \supset N_\nu = N_{\nu+1} = \cdots\cdots$ トナルヤウナ ν ガ存在スル」

例ヘバ定理３ハ次ノヤウニシテ證明サレル。

$M_n \subseteqq M_{n+1}$ デアルコト及ビ $M_{n-1} = M_n$ ナラバ $M_n = M_{n+1}$ トナルコトハ容易ニ分ル、ソコデ總テノ

n =對シテ $M_n \subset M_{n+1}$ ガ成立スルト假定スル．M_{n+1} ノ中カラ $\|M_n(X_{n+1})\| = 1,\ 1 \leqq \|X_{n+1}\| \leqq 2$ ヲ滿足スル X_{n+1} ヲ取リ，$Y_n = F(X_n)$ ト置ク．$\{Y_n\}$ ハ緊ツテキル（compact）カラ收斂ナ部分列ヲ含ム、一方＝於イテ $Y_{n+p} - Y_n = X_{n+p} - X \ (p > 0)$ ト置ケバ

$X = X_n + \Phi(X_{n+p}) - \Phi(X_n) \in M_{n+p-1}$ ヲ得ルカラ $\|Y_{n+p} - Y_n\| \geqq 1$ トナリ $\{Y_n\}$ ガ收斂ナ部分列ヲ含ムコトハ出來ナイ、コレハ矛盾デアル。

定理5〔3〕「(2) ガ総テノ ξ =對シテ解ヲ持テバ(1)ヲ滿足スル X ハ 0 =限ル」

定理6　「(1)ヲ滿足スル X ガ 0 =限ルナラバ (2) ハ総テノ ξ =對シテ解ヲ持ツ」

定理5ハ定理3カラ，定理6ハ定理4カラ導カレル。例ヘバ定理5ハ次ノヤウ＝シテ証明サレル。

(1) ガ 0 デナイ解 X_0 ヲ持ツト假定スル、一般＝ X_{n-1} ガ定義サレタトキ $\Phi(X) = X_{n-1}$ ヲ滿足スル X ノ一ツヲ X_n トスル．$\Phi^n(X_n) = X_0 \neq 0,\ \Phi^{n+1}(X_n) = \Phi(X_0) = 0$ デアルカラ M_{n+1} ハ M_n =屬シナイ点 X_n ヲ含ム．コレハ定理3＝矛盾スル。

定理7　「$n > 0$ ナル時 $M_n \cap N_n$ ガ 0 デナイ点ヲ含メバ $M_n \subset M_{n+1},\ N_n \supset N_{n+1}$ デアル」

定理8　「$n > 0$ ナル時 $M_n \cap N_n$ ガ 0 ダケヲ含ムナラバ $M_n = M_{n+1},\ N_n = N_{n+1}$ デアル」

例ヘバ定理7ハ次ノヤウニシテ証明サレル。

$\text{亜}^n(N_n)=N_{2n}\subseteqq N_n$ デアルカラ (3), (4) ヲ N_n ニ於ケル方程式ト考ヘテヨイ。ソノトキ (4) ガ0デナイ X デ満足サレルカラ $N_{2n}\subset N_n$ 従ッテ $N_{n+1}\subset N_n$ ヲ得ル.
又 $M_n\cap N_n$ ニ属スル0デナイ点 x ヲ取レバ $\text{亜}^n(x)=0$ 且ッ $\text{亜}^n(X)=x$ ヲ満足スル X ガ存在スル. $\text{亜}^{2n}(X)=\text{亜}^n(x)=0$ デアルカラ X ハ M_{2n} ニ属シ M_n ニ属シナイ、即チ $M_n\subset M_{2n}$ 従ッテ $M_n\subset M_{n+1}$ ヲ得ル。

定理3―8カラ

定理9〔6〕.「$\mu=\nu$」

M_n ガ有限ナ次元ヲ持ツカラ M_n+N_n モ一次閉集合デアル. $M_n\cap N_n$ ノ代リニ M_n+N_n ヲ考ヘテモ定理9ニ達スル. 即チ定理7, 8ヲ使ハズニ次ノ二定理ヲ得ル。

定理10. 「$n>0$ ナル時 $E\supset M_n+N_n$ ナラバ $M_n\subset M_{n+1}$, $N_n\supset N_{n+1}$ デアル」

定理11. 「$n>0$ ナル時 $E=M_n+N_n$ ナラバ $M_n=M_{n+1}$, $N_n=N_{n+1}$ デアル」

定理7, 8, 10, 11ヲ纏メレバ

定理12. 「$n>0$ ナルトキ次ノ四條件ハ同等デアル。

$M_n=M_{n+1}$, $N_n=N_{n+1}$, $M_n\cap N_n=(0)$, $M_n+N_n=E$.」

$n=0$ ナラバ此ノ定理ノ後ノ二條件ハ常ニ満足サレテヰルカラ問題ニナラナイ。

定理13〔7〕「$M_0=M_1$ ト $N_0=N_1$ トハ同等デアル」

コレハ定理5,6ノ言ヒ換ヘニ過ギナイガ定理12ト比較ノ便宜上掲ゲタノデアル。

$$M_\mu \cap N_\mu = (0), \quad M_\mu + N_\mu = E$$

デアルカラ

定理14〔8〕「Eノ点ハM_μノ点トN_μノ点ノ和トシテ唯一通リニ表ハサレル」

一般ニ $\Phi(L)=L$ ヲ満足スル集合 L ヲ取ル. $N_n \supseteqq L$ ナラバ $N_{n+1}=\Phi(N_n)\supseteqq \Phi(L)=L$ ヲ得ル、$N_0=E\supseteqq L$ デアルカラ結局 $N_\mu \supseteqq L$ ヲ得ル。

定理15.「N_μハ$\Phi(L)=L$ヲ満足スル集合ノ最大ノモノデアル」