338. *Metrisation* ノ問題（II）

角谷静夫（阪大）

定理 II ノ証明

定理 II ヲ証明スルニハ次ノ定理 III ヲ証明スレバ十分デアル。

定理 III. R_1 ガ metrisch, im kleinen kompakt デ zusammenhängend デアッテ、R_2 ガソノ部分空間デ R_1 ニ於テ開デテ居レバ R_2 ノ任意ノ Metrik ハ R_1 全体ヘ fort setzen スルコトガ出来ル。

先ヅ定理 III カラ定理 II ガ得ラレルコトヲ証明ショウ.

R_1 ノ Metrik ガ ρ_1, R_2 ノ Metrik ガ ρ_2 ニヨッテ與ヘラレタトセヨ。

R_1 ヲ zusammenhängend ナ部分（"Komponent"）ニ分ツ。

$$R_1 = \sum_{\alpha} R_{1,\alpha}$$

$R_{1,\alpha}$ ハ何レモ R_1 ニ於イテ同時ニ閉ヂテ開イタ集合デアル。且ツ $\alpha \neq \beta$ ナラバ $R_{1,\alpha} \cdot R_{1,\beta} = 0$。次ニ

$$R_{2,\alpha} = R_2 \cdot R_{1,\alpha}$$

$R_{2,\alpha}$ ハ空集合デアルカモ知レナイ。$R_{2,\alpha} \neq 0$ ナル α ヲ α' [4], $R_{2,\alpha} = 0$ ナル α'' ニテ表ハスコトニスレバ

$$R_2 = \sum_{\alpha'} R_{2,\alpha'}$$

デアル。更ニ

$$R_1' = \sum_{\alpha'} R_{1,\alpha'}, \qquad R_1'' = \sum_{\alpha''} R_{1,\alpha''}$$

トオク。

$$R_1 = R_1' + R_1''$$

デアル。定理 III ニヨリ $R_{2,\alpha'}$ ニテ定義サレタ $\rho_{2,\alpha'}(x,y) = \rho_2(x,y)$ ハ $R_{1,\alpha'}$ 全体へ *fortsetzen* スルコトが出来ル。コレヲ $\rho^*_{2,\alpha'}(x,y)$ トセヨ。

R_1' ニ於ケル *Metrik* $\rho_2^{*1}(x,y)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

1°. $x, y \in R_{1,\alpha'}$ ナラバ $\rho_2^{*1}(x,y) = \rho^*_{2,\alpha'}(x,y)$

2° $x \in R_{1,\alpha'}$, $y \in R_{1,\beta'}$ ナラバ

$$\rho_2^{*1}(x,y) = \underset{\substack{z_{\alpha'} \in R_{2,\alpha'} \\ z_{\beta'} \in R_{2,\beta'}}}{U.G} \left\{ \rho^*_{2,\alpha}(x, z_{\alpha'}) + \rho_2(z_{\alpha'}, z_{\beta'}) \right.$$

---

4) β' モ $R_{2,\beta'} \neq 0$ ナルトキニ用ヒル。

$$+\rho^*_{2,\beta'}(z_{\beta'}, y)\Big\}$$

コノ定義ハ次ノ場合ニハ次ノ如ク簡単ナ形ニナル。

(a) $x \in R_{2,\alpha'}$, $y \in R_{2,\beta'}$ ナラバ $\rho_2^{*\prime}(x, y) = \rho_2(x, y)$

(b) $x \in R_{2,\alpha'}$, $y \in R_{1,\beta'} - R_{2,\beta'}$ ナラバ

$$\rho_2^{*\prime}(x, y) = \underset{z_{\beta'} \in R_{2,\beta'}}{\mathrm{u.G}} \Big\{\rho_2(x, z_{\beta'}) + \rho^*_{2,\beta'}(z_{\beta'}, y)\Big\}$$

(c) $x \in R_{1,\alpha'} - R_{2,\alpha'}$, $y \in R_{2,\beta'}$ ナルトキモ同様.

此ノ如ク定義サレタ $\rho_2^{*\prime}(x, y)$ ガ R_2 ニ於テ $\rho_2(x, y)$ ト一致スルコトハ (1°) 及ビ (2°)(a) ヨリ明カデアルカラ, $\rho_2^{*\prime}(x, y)$ ガ R_1' 全体ヘノ ρ_2 ノ Fortsetzung デアルコトヲ示スニハ

(I) $\rho_2^{*\prime}(x, y)$ ガ距離ノ三公準ヲ満足スルコト。

(II) R_1' デ考ヘテ $\rho_2^{*\prime}(x, y)$ ト $\rho_1(x, y)$ ガ topologisch äquivalent ナルコト。

ガ云ヘレバヨイ。コレラハ容易デアルカラ省略スル。

次ニ $z' \in R_1'$, $z'' \in R_1''$ ヲ夫々任意ニエランデ $\rho_2^*(x, y)$ ヲ

1°. $x, y \in R_1'$ ナルトキハ $\rho_2^*(x, y) = \rho_2^{*\prime}(x, y)$

2°. $x, y \in R_1''$ ナルトキハ $\rho_2^*(x, y) = \rho_1(x, y)$

3°. $x \in R_1'$, $y \in R_1''$ ナルトキハ

$$\rho_2^*(x, y) = \rho_2^*(y, x) = \rho_2^{*\prime}(x, z') + 1 + \rho_1(z'', y)$$

トオク。(従ッテ $\rho_2^*(z', z'') = 1$) 斯ノ如ク定義サレタ ρ_2^* ガ定理II ニ於テ求メテヰルモノデアルコトハ容易ニワ

カル。（イツモノ様ニ條件(I),(II)ヲシラベレバヨイ）

定理IIIヲ証明スルタメニ次ノ定理IVヲ証明スル。

定理IV. *metrisch, im kleinen kompakt, zusammenhängend* ナ空間 R ハ適當ニ *Metrik* ヲツケカヘレバ「有界集合ハスベテ R ニ於イテ *kompakt* デアル。(*Bolzano-Weierstrass* ノ定理ガ成立スル) 空間」トナル。

<u>定理IVノ証明</u>　*Alexandroff* ノ定理（紙上談話會75号,327参照）ニヨリ R ハ *separabel* デアルカラ R ニ一点 ξ ヲツケ足シテ R+ξ ガ *kompakt*, *separabel* シタガッテ *metrisch* ニスルコトガ出来ル。

コノ *Metrik* ヲ ρ トセヨ。a ヲ R ノ任意ノ一定点トシ R ノ新シイ *Metrik* $\bar{\rho}$ ヲ

$$\bar{\rho}(x,y)=\left|\frac{\rho(a,x)}{\rho(\xi,x)}-\frac{\rho(a,y)}{\rho(\xi,y)}\right|+\rho(x,y)$$

ニヨッテ定義スル。

$\bar{\rho}(x,y)$ ガ距離ノ三公準ヲ満足スルコトハ容易ニワカル。

又、$\bar{\rho}(x,y)\geqq\rho(x,y)$ デアルカラ $\bar{\rho}(x_0,y_n)\to 0$ ナルトキ $\rho(x_0,y_n)\to 0$

逆ニ $\rho(x_0,y_n)\to 0$ ナルトキ

$$\left| \frac{\rho(a, x_0)}{\rho(\xi, x_0)} - \frac{\rho(a, y_n)}{\rho(\xi, y_n)} \right| \to 0$$

デアルカラ $\bar\rho$ ト ρ ハ R ニテ *topologisch äquivalent* デアル。

$\bar\rho$ ガ求メル *Metrik* デアルコトハ $y_n \to \xi$ ナルトキ
（$\rho(\xi, y_n) \to 0$ ナルトキ）

$$\bar\rho(x_0, y_n) \to \infty$$

ヨリワカル。

<u>定理 IV ヲ用ヒテ定理 III ヲ証明スルコト</u>： R_1, R_2 ノ *Metrik* ガ夫々 ρ_1, ρ_2 ニヨリ與ヘラレタトセヨ。定理 IV ニヨリ R_1 ノ *Metrik* ρ_1 ハ $\bar S(a, n)$ ガスベテ *kompakt* ニナル如ク定メラレテヰルト考ヘルコトガ出来ル。（a ハ R_2 ニ属スル一定点トス。）

$$R_2 \cdot \bar S(a, n) = R_2^n \quad n = 1, 2, 3, \text{--------}$$

トオク。R_2^n ハ $\bar S(a, n)$ ニテ閉デテヰルカラ，ソレ自身 *kompakt, abgeschlossen* デアル。故ニ R_2^1 ニテ定義サレタ $\rho_2^1 = \rho_2$ ハ $\bar S(a, 1)$ 全体ヘ *fortsetzen* スルコトガ出来ル。

コレヲ ρ_2^{1*} ニテ表ハス，一般ニ $\bar S(a, n)$ ニテ ρ_2^{n*} ガ定義サレ、R_2^n ニテ $\rho_2^{n*} = \rho_2$ デアルトキ $\bar S(a, n) + R_2^{n+1}$ ニ於テ $\bar\rho_2^{n*}$ ヲ次ノ如ク定義スル。

1°. $x, y \in \bar S(a, n)$ ナルトキ $\bar\rho_2^{n*} = \rho_2^{n*}$

2°. $x, y \in R_2^{n+1} - R_2^n$ ナルトキ $\bar\rho_2^{n*} = \rho_2$

3°. $x\in\bar{S}(a,n)$, $y\in R_2^{n+1}-R_2^{n}$

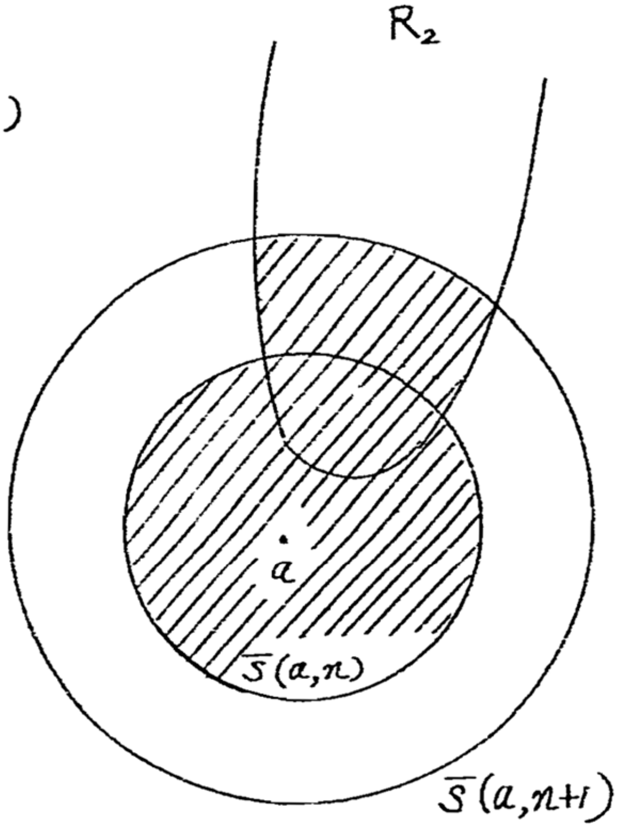
ナルトキ

$$\bar{\rho}_2^{\,n*}(y,x)=\bar{\rho}_2^{\,n*}(x,y)$$

$$=\underset{z\in R_2^{n}}{\mathfrak{u.G.}}\left\{\rho_2^{n*}(x,z)+\rho_2(z,y)\right\}.$$

（故ニ $x\in R_2^{n}$，$y\in R_2^{n+1}-R_2^{n}$ ナルトキハ

$$\bar{\rho}_2^{\,n*}(x,y)=\bar{\rho}_2^{\,n*}(y,x)=\rho_2(x,y)）$$



此ノ如ク定義サレタ $\bar{\rho}_2^{\,n*}(x,y)$ ガ距離ノ三公準ヲ満タシ且ツ R_2^{n+1} ニテハ ρ_2 ト一致シ $\bar{S}(a,n)$ ニテハ ρ_2^{n*} ト一致スルコトハ容易ニワカル。シカモ $\bar{\rho}_2^{\,n*}$ ハ R_1 ニテ ρ_1 ト *topologisch äquivalent* デアル。

次ニ $\bar{S}(a,n)+R_2^{n}$ ハ $\bar{S}(a,n+1)$ ニ於テ *kompakt, abgeschlossen* デアルカラ定理 I ニヨリ $\bar{S}(a,n)+R_2^{n}$ ニテ定義サレタ $\bar{\rho}_2^{\,n*}(x,y)$ ハ $\bar{S}(a,n+1)$ 全体ヘ *fortsetzen* シテコレガ ρ_1 ト *topologisch äquivalent* ニナルヤウニスルコトガ出來ル。

$\rho_2^{*}(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_2^{n*}(x,y)$ ハ $x,y\in R_1$ ナル任意ノ x,y ニ對シテ存在シテ，コレハ容易ニ示サレル如ク所要ノ

$\wp_2(x,y)$ ノ Fortsetzung デアル。

——(証明終)——