337. 距離附ケラレタ環ニ於テ閉デタ連續群, IV.

吉 田 耕 作 (阪大)

I. 前論298.ニ於テ *metrical complete ring* R ニ於テ閉デタ連続群 $\mathfrak{G}$ ガ i) *of finite dimension* ii) *locally compact* iii) *zusammenhängend* ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ *Lie* 群デアル, ヲ証明シマシタガ

假定 i) ハ假定 ii) カラ出ル様デス。ソレニハ論文333ニ南雲氏ノ紹介サレタ F. *Riesz* ノ定理 (*linear metrical space* ノ有界ナ部分ガ *compact* ナラバ, コノ *space* ハ実ハ有限次元デアル) ヲ用ヒレバヨロシイ。即チ

$B = \log A$, $A \in \mathfrak{G}$, $|A - E| \leq \frac{1}{2}$ ナル如キ B ノ全体ヲ $\mathfrak{L}_e$ トスレバ $\mathfrak{L}_e$ ハ假定 ii) ニヨリ *compact*. 然ルニ 68号 5頁定理4カラ $\mathfrak{G}$ ノ E ニ於ケル *differential quotient* ノ全体ナル *linear metrical space* $\mathfrak{I}$ ノ中 0 ニ近イモノハ $\mathfrak{L}_e$ ニ含マレルカラ.

II. 次ニ *Lie* ノ第二基本定理ニ相當スル次ノ結果ガ云ヘル様デス。

定理 R ノ (*real number* ヲ係数トシテノ) k コノ一次独立ナ $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_k$ ガ, ソノ *commutator-produkt* $U_i \times U_j = U_i U_j - U_j U_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots\ldots, k)$ ガ *real number* ヲ係数トシテ $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_k$ ノ一次

結合トナル，ヲ満足スルナラバ

$$\exp.\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \mathfrak{V}_i\right),\quad a \text{ real } \sum_{i=1}^{k}|a_i|<\varepsilon,$$

ハ充分小サナ ε ニ對シ *Lie* ノ *Gruppenkeim* ヲ作ル。

〔注意〕　以下ノ証明ハ其ノマヽ古典的ナ *Lie* ノ理論ニモ apply 出來マスシ，又 <u>canocical parameter ノ合成規則</u>

$$c_i = \varphi_i(a, b);$$

$$\exp.\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \mathfrak{V}_i\right) = \exp.\left(\sum_{i=1}^{r} a_i \mathfrak{V}_i\right)\exp.\left(\sum_{i=1}^{r} b_i \mathfrak{V}_i\right)$$

ヲ求メル方法ヲ與ヘルト云フ意味デ uninteressant？デハナイト思ヒマス。証明ニハ二ツノ *Lemma* ヲ要シマス。

Lemma 1.・$\mathfrak{R}$ ニ einbetten シタ one parameter continuous function $A(t)$, $-a<t<a$ ガ $|A(t)-E|<1$ 及ビ連續微分可能（即チ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$ 存在シ連續）ナラバ $\log A(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\dfrac{(A(t)-E)^{\nu}}{\nu}$ モ亦微分可能ニシテ且ツ

$$\frac{d\ln A(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}A(t)^{-1}\quad\left(A(t)^{-1} = E+\sum_{\nu=1}^{\infty}(E-A(t))^{\nu}\right)$$

証明. $\dfrac{d(A(t)-E)^{\nu}}{dt}=\nu\dfrac{dA(t)}{dt}\left(A(t)-E\right)^{\nu-1}$ ハスグ証セルカラ項別微分可能ナラバ

$$\frac{d\ln A(t)}{dt}=\frac{dA(t)}{dt}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(A(t)-E\right)^{\nu-1}=\frac{dA(t)}{dt}A(t)^{-1}$$

項別微分可能ナコトハ普通ノ *analysis* ト同様ニシテ証セル。

Lemma 2. $Z(t)=\exp.(tU)\exp.(tV)$ トスレバ

$$\frac{dZ(t)}{dt}=\left(U+e^{tU}Ve^{-tU}\right)Z(t)$$

証明. $\dfrac{d\exp.(tU)}{dt}=U\exp.(tU)=\exp.(tU)U$

(前論 280, p. 5 参照) ダカラ $\dfrac{dZ(t)}{dt}=U\exp.(tU)\exp(tV)+\exp.(tU)V\exp.(tV)$ ヲ得ルカラ。

特ニ t ガ充分小サケレバ $(|t|\leqq a)$ $|Z(t)-E|<1$ ダカラ上ノ *Lemma* 1 カラ

$$(1)\quad \frac{d\ln Z(t)}{dt}=\left(U+e^{tU}Ve^{-tU}\right).$$

定理ノ証明. $U, V, U\times V$ ガ全テ $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_k$ ノ一次結合ナラバ充分 t ノ小サイトキ (1) ノ解 $\ln Z(t)$; $\ln Z(0)=0$; ガヤハリ $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_k$ ノ一次結合トナレバヨイ。其ノタメニ

(1) ヲ t ノ冪級数トシテ解イテミル。(t ガ充分小サイトキコノ冪級数ノ收斂及ビコノ解ノ uniqueness ハ容易ニワカル。

$$\ln Z(0)=0,\quad (\ln Z(t))'_0=U+V,$$
$$(\ln Z(t))''=e^{tU}UVe^{-tU}-e^{tU}VUe^{-tU}$$
$$=e^{tU}(U\times V)e^{-tU}$$

カラ $(\ln Z(t))''_0=U\times V$。同ジク $(\ln Z(t))'''_0=U\times(U\times V)$.

假定ニヨリ $U_1,\text{------},U_k$ ヲ base トスル linear space $\mathfrak{I}$ ノ element ニ U ヲ掛ケル ($\times$ ノ意味デ) コトハ $\mathfrak{I}$ ノ一ツノ一次寫像 T_U ヲ意味スル。然ラバ一般ニ

$$(\ln Z(t))''_0=T_U V,\ (\ln Z(t))'''_0=T_U^2 V,\text{------}$$
$$\text{-----},\ (\ln Z(t))^{(n)}_0=T_U^{n-1}V.$$

依ッテ

$$\ln Z(t)=t(U+V)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n T_U^{n-1}V}{n!}$$

ヨッテ $\ln Z(t)$ ハ t ガ充分小サイトキ $U_1,\text{------},U_k$ ノ一次結合トナル。

〔注意〕 上ノ如クシテ得ラレタ Gruppenkeim カラ erzeugen サレタ group (R ニ einbetten スル) ノ E ニ於ケル differential quotient ハ必ズシモ $U_1, U_2,\text{------},U_k$ ノ一次結合トハ限ラナイ (コレヲ含ムケレドモ)。Neumann ガ古典的ナ Lie ノ理論ニ相當ス

ル Matrix ノ場合ニ一ツノ example ヲ示シテヲル (M. Z. 1929)

III. $\mathfrak{R}$ ニ einbetten シタ群ヲ考ヘテル間ニ氣ガ付イタノデスガ Lie ノ第一基本定理ノ essential ナ意味。一般ニ解析函數ニヨツテ定義サレタ変換ノ変換群 $\mathfrak{G}$ ノ element g ヲ変換ヲ作用サセル空間ノ点 P ノ任意ノ Analytic function $f(P)$ ニ作用サセルモノトシテ $f(P) \longrightarrow g.f(P)$ ハ Linear ナ Operator デアルガ特ニ Lie 変換群ノトキハ $\mathfrak{G}$ ノ element ノ中デ充分単位変換ニ近イモノハ，特ニ infinitecimal operator U_i ニヨリ

$$\exp.\left(\sum_{i=1}^{r} a_i U_i\right)$$

ナル特別ナ形ノ linear operator デアルト云フコトニアルノデハナイデセウカ。ソウスレバ Schreier ノ第一基本定理ヲ使フコトニヨリ連結セル Lie 変換群ノ任意ノ element ハ之レヲ上ノ如キ $f(P)$ ニ作用サセルモノトミレバ上ノ如キ exp.—Operator 有限コノ積ト表ハサレル linear operator ニナル。ヨツテ $f(P)$ ニ作用サセルモノトシテ $\mathfrak{G}$ ヲ metrical complete ring ニ einbetten シタ differentiable group ノ如ク取扱ヘル。ダカラコノ点ヲ explicite ニ意識サヘスレバ II ニ述ベタ canonical parameter ノ合成（或ハ第二基本定理ノ逆），adjoint 群ノ話，Normalteiler ノ議論等全テ Matrix 運算（或ハ $\mathfrak{R}$ ニ einbetten シメ Lie 群ノ運算) ト同様ナ <u>Operator calculus</u> ニヨツテ見通シヨク議論デキルワケデス。古典的ナ Bianchi, Vivanti 等ノ書物或ヒハ筆者ノ愚著連続群論モコノ重大ナ点ヲ <u>explicite</u> ニハ意識シテヲリマセン。