334. 多元環ノ Ideal ノ最小公倍數, 最大公約數, IV.

中 山　正 (阪大)

§1. マヅ、前稿III, §2 ニ証明ナシニ述べタ主張

「$\mathfrak{o}_0+\mathfrak{o} \geqq \mathfrak{o}_0+\bar{\mathfrak{o}}$ ナラ $\mathfrak{o}_0 \frown \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{o}_0 \frown \bar{\mathfrak{o}}$」ヲ証明スル(逆ハスデニ証明シタ)

ヤハリ im Kleinen デ考ヘテ, III, 補助定理3ニヨリ

$$\mathfrak{o}_0=\sum \varepsilon_{ik}\mathfrak{o}_D, \quad \mathfrak{o}=\sum \varepsilon_{i,k}\mathfrak{o}_D \pi^{\rho_k-\rho_i}$$

トスル。タヾシ $\rho_1 \leqq \rho_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \rho_r$.

次ニ $\mathfrak{o}_0$ ヲ左-Ordnung ニ, $\bar{\mathfrak{o}}$ ヲ右 Ordnung ニモツ様ナ ganz ナ Ideal (タトヘバ $\mathfrak{o}_0$ ノ $\bar{\mathfrak{o}}$ ニ對スル Distanzideal) ノ一ツヲ $\mathfrak{a}$ トスル. $\mathfrak{a}$ ハトモカク

$$\alpha=\begin{pmatrix} \pi^{\nu_1} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ & \pi^{\nu_2} & \cdots & d_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \pi^{\nu_r} \end{pmatrix}; \quad \nu_i \geqq 0,\ d_{i,k} \in \mathfrak{o}_D$$

ナル形ノ α デ生ズル $\mathfrak{o}_0$ ノ左 Ideal ニナル、シカシテ

$\alpha^{-1}\mathfrak{o}_0\alpha=\bar{\mathfrak{o}}$ デアル。シカルニ α^{-1} ハ

$$\alpha^{-1}=\begin{pmatrix} \pi^{-\nu_1} & e_{12} & \cdots & e_{1r} \\ & \pi^{-\nu_2} & \cdots & e_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \pi^{-\nu_r} \end{pmatrix}; \quad e_{i,k} \in D$$

ナル形デアッテ, コヽニスベテノ $i<k$ ニ對シテ

$$(1) \quad 0=\pi^{\nu_i}e_{ik}+d_{i,i+1}e_{i+1,k}+d_{i,i+2}e_{i+2,k}+\cdots\cdots +d_{i,k}\pi^{-\nu_k}$$

デアル。而シテ $\alpha^{-1}\varepsilon_{ki}\alpha$ $(k>i)$ ヲ考ヘルニ, コノ行列

ノ(i,i)ノ所ノ元ハ $e_{ik}\pi^{\nu_i}$ デアル。

然ルニ $\alpha^{-1}\varepsilon_{ki}\alpha\in\overline{\mathfrak{O}}$, 従ッテ $\in\mathfrak{O}_0+\overline{\mathfrak{O}}$ デアル、ヨッテ $\mathfrak{O}_0+\overline{\mathfrak{O}}\leqq\mathfrak{O}_0+\mathfrak{O}$ ナリトスレバ $\alpha^{-1}\varepsilon_{ki}\alpha\in\mathfrak{O}_0+\mathfrak{O}$. 然ラバ $\mathfrak{O}_0$, $\mathfrak{O}$ ノ形カラ明カナル如クニ $e_{ik}\pi^{\nu_i}$ ガ *ganz* デナケレバナラヌ:

(2) $\quad e_{ik}\pi^{\nu_i}\in\mathfrak{O}_D \qquad (k>i)$

コノ(1)ト(2)カラドノ $i<k$ ニツイテモ $\pi^{\nu_k}\mid d_{ik}$ ナルコトヲ証明シヨウ。ソレニハ先ヅ $k-i=1$, 即チ $k=i+1$ ノ時ニハ (1), (2) ハ $0=\pi^{\nu_i}e_{i,i+1}+d_{i,i+1}\pi^{-\nu_{i+1}}$, 及ビ $e_{i,i+1}\pi^{\nu_i}\in\mathfrak{O}_D$ 即チ $\pi^{\nu_i}e_{i,i+1}\in\mathfrak{O}_D$ トナリ, 従ッテ $d_{i,i+1}\pi^{-\nu_{i+1}}$ ガ *ganz* トナリ主張ガ成リ立ツ. 一般ノ場合ハ $k-i$ ノ大キサニヨル *Induktion* デヤレバ容易ニ証明サレル.

依ッテ $\pi^{\nu_k}\mid d_{ik}$, 従ッテ $\overline{\mathfrak{O}}$ ハ

$$\overline{\mathfrak{O}}=\sum\varepsilon_{ik}\,\mathfrak{O}_D\,\pi^{\nu_k-\nu_i}$$

トナル。然ルニ $\overline{\mathfrak{O}}$ モコノ形ニナホサレタ以上ハ考察ハ容易デアッテ直チニ $\mathfrak{O}_0\cap\overline{\mathfrak{O}}\geqq\mathfrak{O}_0\cap\mathfrak{O}$ ガ証明サレル. (III §2ト同様)

§2. 以上デニツノ *Maximalordnung* ノ *Durchschnitt*, *Summe* ノ様子ガ大体ワカッタカラ今度ハニツノ *gleichseitig* ナ (*Normal* ナ) *Ideal* ニ移ラウ。ソレモ III, 補助定理3ヲ使ヘバ大シタ困難ハナイ.

タトヘバ

<u>定理</u>　$\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ヲ二ツノ Maximalordnung トシ，$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_1$ ヲソレゾレ $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ任意ノ zweiseitig ノ Ideal トスル。今 $\mathfrak{a}_0$ ト zusammengehörig ナ $\mathfrak{O}_1$ ノ Ideal ヲ $\mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{b}_1$ ト zusammengehörig ナ $\mathfrak{O}_0$ ノ Ideal ヲ $\mathfrak{b}_0$ トスル、然ラバ $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$ ノ<u>左及ビ右</u> Ordnung ハソレゾレ $\mathfrak{b}_0 + \mathfrak{a}_1$ ノ<u>右及ビ左</u> Ordnung ニ等シイ。

ナドー寸面白ク思ハレル。（コヽニ $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ Ideal $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ ガ zusammengehörig デアルトハ，左 Ordnung ガ $\mathfrak{O}_0$，右 Ordnung ガ $\mathfrak{O}_1$ ニナルヤウナ Ideal $\mathfrak{a}_{01}$ ニ對シテ $\mathfrak{a}_{01}^{-1}\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_{01} = \mathfrak{a}_1$ トナルコトデアル）。

精シク言ヘバ

<u>定理</u>　$\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ Ideal $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_1$ ニ於テ $(\mathfrak{a}_0)_\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0^\alpha$，$(\mathfrak{b}_1)_\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1^\beta$ トスル．タヾシ $\mathfrak{z}$ ハ Zentrum ノ任意ノ Primideal，$(\mathfrak{a}_0)_\mathfrak{z}$ 等ハ $\mathfrak{z}$-Komponent（$\mathfrak{z}$-Grenzmenge），$\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1$ ハ $\mathfrak{z}$ ヲワル $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ素 Ideal トスル。今假リニ $\alpha \geqq \beta$ トナリトスレバ $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$ ノ左 Ordnung ノ $\mathfrak{z}$-成分ハ $\mathfrak{O}_0 \cap \tilde{\mathfrak{O}}$ ノソレニ等シイ．ココニ $\tilde{\mathfrak{O}}$ トハ $\mathfrak{O}_1$ ノ $\mathfrak{O}_0$ ニ對スル Distanzideal $\mathfrak{d}_{10}$ ト $\mathfrak{z}_0^{\alpha-\beta}$ ノ Durchschnitt ノ左 Ordnung トス。（右 Ordnung ニツイテハ，又ハ $\alpha \leqq \beta$ ノ場合ニハ適當ニ 0, 1, α, β ヲカヘレバヨイ）。

マタ $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_1$ ノ左 Ordnung ノ $\mathfrak{z}$-成分ハ $\mathfrak{O}_1 \cap \tilde{\tilde{\mathfrak{O}}}$ ノソレ

ニ等シイ、コヽニ $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{O}}}$ ハ $\mathfrak{p}_1^{\alpha-\beta}\cap\mathfrak{O}_{10}$ ノ右 Ordnung トス、

（書クトゴタゴタスルガ事柄ハ簡単ナコトデアル）

（証明）ヤハリ im Kleinen デヤル．$\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ヲソレゾレ III, 補助定理3ノ $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}$ ノ如ク表ハシテオク、シカシテ $\mathfrak{p}_0^{t}\cap\mathfrak{O}_1$ $(t\geqq 0)$ ヲ考ヘル．コレノ左 Ordnung ヲ $\mathfrak{O}_L$（勿論一般ニハ Max-$\mathfrak{O}$ デナイ）トスル、$\mathfrak{O}_L\geqq\mathfrak{O}_0\cap\mathfrak{O}_1$ ナルコトハ明カダカラ容易ニ $\mathfrak{O}_L$ ハ

$$\mathfrak{O}_L = \sum \varepsilon_{i,k}\,\mathfrak{O}_D\,\pi^{a_{ik}}$$

ナル形ニカケル．シカルニ $\mathfrak{O}_L$ ハ $\xi\cdot(\mathfrak{p}_0^{t}\cap\mathfrak{O}_1)\subseteqq(\mathfrak{p}_0^{t}\cap\mathfrak{O}_1)$ ナル ξ ノ全体ナルコトヲ考ヘレバ容易ニ

$$a_{ik} = \mathop{\mathrm{Max}}_{j}\left(\mathrm{Max}(t, \rho_j-\rho_i)-\mathrm{Max}(t, \rho_j-\rho_k)\right)$$

トナル、而シテ $\rho_i' = \mathrm{Min}(\rho_r-t, \rho_i)$ トオケバ

$$a_{ik} = \mathrm{Max}(0, \rho_k'-\rho_i')$$

トナリ，$\mathfrak{O}_L=\mathfrak{O}_0\cap\widetilde{\mathfrak{O}}$ トナル、但シ $\widetilde{\mathfrak{O}}$ ハ

$$\widetilde{\mathfrak{O}} = \sum \varepsilon_{ik}\,\mathfrak{O}_D\,\pi^{\rho_k'-\rho_i'}$$

ナル Maximalordnung デアル．シカシテコノ $\widetilde{\mathfrak{O}}$ ガ $\mathfrak{p}_0^{t}\cap\mathfrak{O}_{10}$ ノ左 Ordnung ニナルノデアル（$\widetilde{\mathfrak{O}}$ ハ其他，$\mathfrak{p}_1^{\rho_r-t}\cap\mathfrak{O}_{01}$ ノ左 Ordnung，又ハ $\mathfrak{p}_0^{\rho_r-t}+\mathfrak{O}_{01}$, $\mathfrak{p}_1^{t}+\mathfrak{O}_{10}$ ノ右 Ordnung トシテ charakterise スルコトモ出來ル）

一般ノ $\mathfrak{p}_0^{\alpha}\cap\mathfrak{p}_1^{\beta}$ ハ容易ニ $\mathfrak{p}_0^{\alpha-\beta}\cap\mathfrak{O}_1$ ノ考察ニ歸セラレル。

Summe ノ方モ大体同様デアル。

兎モ角 $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_0+\mathfrak{b}_1$ 等ガ $\mathfrak{o}_0\cap\mathfrak{o}_1$ ノ *zweiseitig* ノ *Ideal* ナルコトハ明カナノダガ，ソノ左，右 *Ordnung*（両者ハ必ズシモ一致シナイ）ハ上述ノ定理カラワカル如ク一般ニソレヨリモ大キクナル。而シテ $\mathfrak{a}_0\cap\mathfrak{b}_1$（又ハ $\mathfrak{a}_0+\mathfrak{b}_1$）ノ $\mathfrak{z}$ 成分ガ<u>丁度</u> $\mathfrak{o}_0\cap\mathfrak{o}_1$ ノソレヲ左及ビ右 *Ordnung* ニモツ *gleichseitig* ナ *Ideal* ニナルノハ，$(\mathfrak{o}_0)_\mathfrak{z}=(\mathfrak{o}_1)_\mathfrak{z}$ ノトキヲ除ケバ $\alpha=\beta$ ノトキ，云ヒカヘレバ $(\mathfrak{a}_0)_\mathfrak{z}$ ト $(\mathfrak{b}_1)_\mathfrak{z}$ ガ *zusammengehörig* ナルトキニカギル。コノ場合ニ於テ $\mathfrak{a}_0\cap\mathfrak{b}_1$ ガ $\mathfrak{o}_0\cap\mathfrak{o}_1$ ノ *Ideal* 論ニ對シテモツ意味ニツイテハ次ノ稿デ考察シタイ。