333. 積分方程式ノ抽象的考察ニ就テ

南雲道夫（阪大）

[1] 最近福原氏ガ非常ニ範囲ノ廣イ領域ニ於ケル函数方程式ノ理論ヲ抽象的ナ方法デ建設スルコトニ努力シテ居ラレル。ソノ特別ナ場合トシテ自然 *Fredholm* ノ積分方程式ノ抽象的考察ヲモ論ジテ居ラレル。

只福原氏ノハ規模ガアマリニ大キイタメニカヘッテ特種ナ問題ニハ、スラスラ行カヌコトガアル。然シ福原氏ハソノ過去ノ行キ方ヲ見ルニ如何ナル大難題デモ少シモ *hekieki* セズ孤軍奮闘ノ後遂ニ之レヲ克服セラレルノガ常デアル。ソノ点小生ノ如クイツモ一寸シタ思ヒ付キニノミ興味ヲ持ッテ難題ヲ回避シテヰルノハオ恥カシイ次第デアル。

福原氏ガ最近抽象的ニ積分方程式（第二種）ヲ論ゼラレタノト同ジ問題ヲ F. Riesz ガ 1918年 Acta Math. 41（71頁——98頁）ニ論ジテ大体ニ充分ナ結果ヲ得テヰル、此ノコトハ平素無精デ文献ニ暗イ小生ガ近頃北川敏男君カラ教ヘラレタ。1918年トイヘバ、カノ世界大戦ノ終リデアル。ノミナラズ F. Riesz ガ此ノ論文ヲ書イタノガ 1916年一月十九日デアルカラ既ニ満二十年ヲ過ギテヰル。論文ノ表題ハ *Über lineare Funktionalgleichungen* デアル.
福原君ハ恐ラク此ノ論文ヲ御存知ナク，全ク独立ナ見地カラ同ジ問題ヲ論ゼラレタモノト思ハレル。次ニ Riesz ノ得

タ重ナ結論ヲ簡單ニ述ベテ、ソレニ小生ノ考察ヲ蛇足的ニ附ケ加ヘテ見ヨウ。

$\boxed{2}$ 任意ノ函数 $f(x)$〔連続或ハ自乗積分可能ノ如キ〕ニ對スル線状運算（或ハ線状変換）

$$Af=\int K(x,y)f(y)\,dy$$

ナル記号ヲ用ヒレバ，*Fredholm* ノ第二種積分方程式

$$\varphi(x)-\int K(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x)$$

ハ　　$(E-A)\varphi=f$　　〔$Ef=f$ トス〕

ナル記号デ表ハサレル。

今函数 $f(x)$ ヲ抽象的ナ点（要素）トスル線状空間《一次結合及ビ大サ〔絶對値 $|f|$〕ノ定義サレタ空間．之レヲ *normierter linearer metrischer Raum* 或ハ *Banach* 空間トモ云フ》ヲ $\mathfrak{R}$ トスレバ $\varphi\in\mathfrak{R}$, $f\in\mathfrak{R}$, E ハ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル不変ナ変換,（f ヲ f 自身ヘ移ス）A ハ *vollstetig* ナ線状変換《有界ナ集合ヲ緊ッタ（*kompakt* ナ）集合ニ移ス線状変換》デアル。*Riesz* ハカクテ一般的ナ線状空間 $\mathfrak{R}$ ニ於ケル抽象的ナ方程式（A ハ *linear vollstetig*，E ハ *Einheit*）

$$(E-A)\varphi=f$$

ヲ論ジテ次ノ重要ナ結果ヲ得タ。

(1)　$(E-A)\varphi=0$　ナル方程式ノ解 φ ハ高々有限次元ノ線状集合（*lineare Mannigfaltigkeit*）ヲ

ナス。

(2) $(E-A)\varphi=g$ ガ任意ノ g ニツイテ常ニ解 φ ヲ有スレバ、ソノ解ハ一義的ニ決定スル。〔従ツテ (1) ノ解ハ $\varphi=0$ ニカギル〕

(3) $(E-A)$ ノ逆ノ運算 $(E-A)^{-1}$ ガ存在スルカ，然ラザレバ $(E-A)\varphi=0$ ハ $\varphi\neq 0$ ナル解ヲ有ス。〔$(E-A)^{-1}$ ハ線状有界！〕.

(4) $(E-\lambda A)\varphi=0$ ガ $\varphi\neq 0$ ナル解ヲ有スルトキノ複素数 λ ヲ *Eigenwert* ト呼ブ。シカラバ *Eigenwert* ハ有限ナ集積値ヲ持タナイ。

以上ノ重要ナ諸定理ノ証明ノ簡単ナ *Sudimiti* ヲ紹介スルコトハ極メテ興味アルコトデアルガ，今之レヲ省略シテ只次ノ *Lemma* ガ基礎的ナ役目ヲ演ジテ居ルコトヲ注意シテ置ク。(要ハ *Lemma* ヲ巧ニ運用スルニアル)。又超限的方法(*tranfinit number*)ヲ用ヒナイデスム。

Lemma $\mathfrak{L}_1\supset\mathfrak{L}_2$ ナル $\mathfrak{R}$ 内ノ線状集合(閉集合)デ $\mathfrak{L}_1\neq\mathfrak{L}_2$ ナラバ $f\in\mathfrak{L}_2$ ナル総テノ f ニツイテ

$$g\in\mathfrak{L}_1 \quad g\notin\mathfrak{L}_2 \quad |g|=1$$
$$|g-f|\geqq 1-\varepsilon \quad (\varepsilon\text{ 任意、例ヘバ }\tfrac{1}{2})$$

ナル一定ノ g ガ存在スル。

(註) 空間 $\mathfrak{R}$ ニハ *inner product* ガ定義サレテナイカラ垂直ナル概念ハナイ。然シ上ノ *Lemma* ハ或ル意味ニ於イテ g ガ $\mathfrak{L}_2$ ニ殆ンド垂直ナルコトヲ示ス！ $\mathfrak{L}_2$ ガ有限次

元ナラバ $\varepsilon=0$ ニ出来ル。

尚上ノ *Lemma* カラ次ノ著シイ定理ガ導カレル。

$\boxed{\text{Riesz ノ定理}}$ $\mathfrak{R}$ ノ有界ナ部分（$x \in \mathfrak{R}$, $|x| \leqq 1$ ナル x ノ全体）ガ緊ツテヰル（*kompakt*）時ニハ，$\mathfrak{R}$ ハ <u>有限次元</u>デアル！

$\boxed{3}$ 次ニ *Riesz* ノ得タ結果ヲ基ニシテ之レニ蛇足ヲ加ヘテ見ヨウ。

(3) ニヨリ $(E-\lambda A)\varphi=0$ ノ固有値（孤立シテヰル）以外ノ λ ニツイテハ有界ナ $(E-\lambda A)^{-1}$ ガアル。所ガ

$$(E-\lambda A)^{-1}=E-\lambda R_\lambda \qquad (\lambda \neq \text{固有値})$$

トスレバ R_λ ハ <u>*vollstetig*</u> ナ *Operator* デ且ツ λ ノ函数トシテ固有値以外デハ<u>正則</u>（λ ハ複素数）デアル．

R_λ ガ *vollstetig* ナコトハ次ノ様ニシテ分ル。
先ヅ有界ナ *linear Operator* T ニツキ

$$\boxed{\|T\|=\frac{|Tx|}{|x|} \text{ ノ上限}}$$

ニヨツテ T ノ絶對値ナルモノヲ定義スル。シカラバ
$\|T-E\|<1$ ノ時

$$T^{-1}=E+\sum_{n=1}^{\infty}(E-T)^n.$$

從ツテ $T=E+V$, V *vollstetig* ナル時ハ $\|V\|<1$ ナルトキ $(E+V)^{-1}=E+V^*$, V^* *vollstetig* トナル。

次ニ A カラ生ズル閉ヂタ環（E, A ノ多項式及ビ $\|T\|$

ナル *Metrik* ニヨルソノ極限ノ全体）ヲ $\mathfrak{A}$ トスレバ，

$(E-\lambda A)^{-1}$ ハ λ ノ固有値（孤立点）ヲ避ケタ道ニ沿フテ進ムコトニヨリ，E カラ順次ニ解析接続ト同様ナ考ヘ方ニヨリ，$(E-\lambda A)^{-1}\in\mathfrak{A}$（$\lambda\neq$ 固有値）ガ証明サレル。故ニ $(E-\lambda A)^{-1}=E-\lambda R_\lambda$，$R_\lambda$ *vollstetig* ガ証明出来ル。

又一般ニ T_λ ガ λ ニツイテ正則デ $T_{\lambda_0}^{-1}$ ガ存在（有界）ナラバ，T_λ^{-1} ハ λ_0 ニ於テ正則トナル。

$$\left(T_\lambda^{-1}=T_{\lambda_0}^{-1}\left\{E+\sum_{n=1}^{\infty}\left(E-T_{\lambda_0}^{-1}T_\lambda\right)^n\right\}\text{ ニヨル}\right).$$

従ッテ固有値以外デハ R_λ 正則ヲ得ル。

（註）λ_0 デ T_λ ガ複素数 λ ノ正則函数トハ，λ ニ関スル微係数．

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{T_{\lambda+\Delta\lambda}-T_\lambda}{\Delta\lambda}=\frac{dT_\lambda}{d\lambda}$$

ガ λ_0 ノ近傍デ常ニ存在スルコトヲ云フ．之レニツイテハ *Cauchy* ノ積分定理，積分表示，*Goursat* ノ定理，*Taylor* 展開等ガスベテ通常ノ正則函数ト同様ニ成立スル。時ニ $\lambda=\lambda_0$ ガ孤立特異点ナラバ *Laurent* ノ展開

$$T_\lambda=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(\lambda-\lambda_0)^n\quad(0<|\lambda-\lambda_0|<R\text{ デ収斂})$$

ガ成立スル。但シ $C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\dfrac{T_\lambda\,d\lambda}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}$.

[4] 積分方程式ニ関スル古典的良書ノ一ツ Lalesco 著 *Introduction a la théorie des équations integrales.* (1912). ニ Resolvent R_λ ノ立入ッタ構造ガ論ゼラレテヰル。ソレト同様ナコトガ抽象的ナ問題ニ於テモ成立スル。即チ R_λ ハ λ ノ固有値 $\lambda=\lambda_0$ ニ於テ極デアル。ソノ証明法ハ Lalesco ガ R_λ ノ分解ヲ述ベテアル方法ト殆ド同様デアル。但シ Lalesco デハ Fredholm ノ行列式ノ結果ヲ用ヒテヰルカラ，極ニナルコトハ最初カラ仮定サレテヰル。此処デハ Lalesco ノ方法ヲ用ヒテ逆ニ極ニナルコトヲ証明シヨウ。然シ証明ノ最モ本質的ナ点ハ Riesz ノ定理ヲ應用スル所ニアル。

$(E-\lambda A)(E-\lambda R_\lambda)=E$ ナル関係カラ R_λ ニ関スル方程式

(1) $R_\lambda - R_\mu = (\mu-\lambda) R_\lambda R_\mu$

ガ得ラレル（Lalesco：43頁）。所ガ λ ノ固有値 λ_0 ハ R_λ ノ孤立特異点（R_λ ハ一意函数）デアルカラ，$\lambda=\lambda_0+h$, $\mu=\lambda_0+h'$ トシテ R_λ, R_μ ヲ h 及ビ h' ノ Laurent 級数ニ展開シテ (1) ノ両辺ヲ比較スレバ，

$$R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_\nu}{(\lambda-\lambda_0)^\nu} + R'_\lambda \qquad (R'_\lambda \text{ ハ } \lambda_0 \text{ デ正則})$$

トスルトキ，容易ニ $B_{p+q-1} = B_p B_q$ ヲ得ル、之レカラ

$B_1^2 = B_1$, (*Idempotent*)

$B_{p+1} = B_2^{\,p}$,

$$B_1B_2 = B_2B_1 = B_2.$$

ソコデ B_1 ガ全空間 $\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{L}_0$ ニ移スモノトスレバ，$\mathfrak{L}_0$ ノ各点ハ B_1 ニヨリ不変デアル。所ガ B_1 ハ vollstetig ($B_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint R_\lambda d\lambda$) デアルカラ，$\mathfrak{L}_0$ ノ有界ナ部分ハ緊ッテ (kompakt) キル。故ニ Riesz ノ定理ニヨリ $\mathfrak{L}_0$ ハ有限次元トナル。

次ニ B_2 ハ $\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{L}_0$ 内ニ移シ，$\mathfrak{L}_0$ ヲ $\mathfrak{L}_0$ 内ニ移スノデアルカラ

$$B_2 = CB_1, \quad B_{p+1} = C^p B_1.$$

但シ C ハ有限次元ノ空間 $\mathfrak{L}_0$ 内ノ一次変換デアル。故ニ

$$R_\lambda = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}} \right\} B_1 + R'_\lambda.$$

所ガ $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C^n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}$ ガ $|\lambda-\lambda_0| > 0$ デ収斂スルタメニハ

$C^k = 0$ (k ハ $\mathfrak{L}_0$ ノ次元) ナルヲ要スル。何トナレバ C ヲ標準型

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \vdots & & \alpha_k \end{pmatrix}$$

ニ改メテ見レバ，$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C^n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}$ ハ $|\lambda-\lambda_0| < \mathrm{Max}|\alpha_j|$ デ発散スルカラ，$\alpha_1 = \cdots\cdots = \alpha_k = 0$. 之カラ容易ニ $C^k = 0$.

故ニ R_λ ハ高々无次ノ極デアル。

$\boxed{5}$ 上ノ事カラ尚先ヘ Lalesco ノ方法ヲ辿ツテ Resolvent ノ構造ヤ $(E-\lambda A)\varphi=f$ ノ解ナドノ関係ヲ論ズルコトが出來ルデアラウト思フ。カクテ Fredholm ノ行列式ヲ離レテ，可ナリ具体的ニ抽象的ナ積分方程式論が研究出來ルコトが明ラカトナツタ。此処デハ Riesz ノ研究が基礎的ナ役割ヲ演ズル。Riesz ノ論文ハ 28 頁モアルケレドモ叮寧ニ行キトヾイタ証明がシテアルカラ讀ミ易イ。シカモ 28 頁ノ内デ本論ニ必要ナノハ 10 頁乃至 20 頁位デアル。(必要ナ定理ハ Hilfssatz 1, Hilfssatz 2, (Satz 1). Satz 2, Satz 3, Satz 4, Satz 6, Satz 7, Satz 12 ダケデアル)

次ニ尚 Fredholm ノ第三定理（固有値ノ時 nicht-homogen ナ式ノ解ケル條件）ハ Riesz ノ抽象的ナ方法カラハ得ラレナイ。之レニツイテハ自分ノ平素ノ不勉強ヲ告白スル次第デアルが，三村氏が Schauder ノ論文 Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen (Studia Math. II. 1930, 183 頁 — 196 頁) ニ konjugierte Operation ノ概念ヲ（抽象的ニ）定義シテ第三定理が証明シテアルコトヲ教ヘテ下サツタ。教ヘラレテ見ルト überall dicht ニ讀ムベキ名論文がアルノデ面喰ツテシマフ。自分ノ貧弱ナ頭デ果シテドレダケ消化シ切レルカ，極少シヅヽ學ビタイト思フ。廣大ナ大洋カラ離レナ，

岩間ノ滴水ヲノミ味ッテキタ自分ヲ顧ミテ背汗ヲモヨホス次第デアル。

尚以上ノ如ク積分方程式ヲ抽象的ニ考察スル所以ハ只抽象化ノタメノ抽象化デハナイ。之レニヨッテ複雑ナ具体的問題ニ對スル理論上ノ見透シヲ得ルノデアル。例ヘバ

$$\varphi(x,y)=\alpha(x,y)\varphi(a,b)+\int_C \beta(x,y,s)\varphi(\xi(s),\eta(s))ds$$
$$+\iint_G K(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+f(x,y)$$

ニ於テ $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y,s)$, $K(x,y,\xi,\eta)$, $f(x,y)$ ガ與ヘラレタ函數 $\varphi(x,y)$ ガ未知函數トスルトキ，Fredholm ノ行列式ニヨル方法ハ不可能デハナイニセヨ，余リニ複雑トナルデアラウ。之ニ對シテモ

$$\varphi(x,y)=A\varphi(x,y)+f(x,y)$$

トスレバ A ハ vollstetig ナ linear Operator デアルカラ本論ニヨッテ理論上ノ見透シガ得ラレル。（具体的解答ガ得ラレルノデハナイガ）