327. Im kleinen kompakt ナ空間ノ Metrisation ニ就イテ

角谷静夫（阪大）

Alexandroff 及ビ Urysohn ハ im kleinen kompakt ナ空間 R ガ metrisierbar デアルタメニハ R ガ任意ノ Mächtigkeit ノ個数ノ互ニ共通点ノナイ開集合 G ノ和デアッテコノ各々ノ開集合 G ガ Hausdorff ノ第二ノ Abzählbarkeitsaxiom ヲ満足スルコトガ必要且ツ十分デアルコトヲ証明シタ。*

コノ証明ハ十分性ノ方ハ Urysohn ノ Metrisationssatz ヲ用フレバ容易デアル**ガ必要性ノ証明ハ相当面倒デアル上ニ Wohlordnungssatz ヲ用ヒテキルノデ次ニ比較的簡単ナ Wohlordnungssatz ヲ用ヒナイ証明ヲ掲ゲル。

---

* P. Alexandroff: Über die Mächtigkeit der im kleinen kompakten topologischen Räume, Math. Ann. Bd. 92.

P. Alexandroff et P. Urysohn: Mémoire sur les espaces topologiques compakts, Verhandelingen der konink. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, 1929.

** 十分ナルコトハ次ノ如ク証明スル。各々ノ G ハ im kleinen kompakt デ Hausdorff ノ第二ノ abzählbarkeitsaxiom ヲ満足シテキルカラ一点 ξ ヲ附加シテ $G+\xi$ ガ kompakt デ且ツ Hausdorff ノ第二ノ abzählbarkeitsaxiom ヲ満足スルヤウニ出来

Rハ互ニ共通点ノナイ各々zusammenhängendナ開集合("komponent") Gノ和トシテ表ハサレルカラGがzusammenhängend, metrisch, im kleinen kompakt ナルトキGがHausdorff ノ第二ノAbzählbarkeitsaxiom ヲ満足スルコトヲ示セバヨイ。コノタメニハGニテ überall dicht ナ可附番集合ヲ作レバヨイ(Gハ假定ニヨリ metrisch デアルカラ)。以下Gヲ全空間ト考ヘル。

Gハ im kleinen kompakt デアルカラGノ各点xニ對シテδヲ十分小サクトレバ$\bar{S}(x,\delta)$ハ kompakt ニナリ, シタがッテGが metrisch ナルコトヨリ$S(x,\delta)$ハ separabel ニナル。$S(x,\delta)$が separabel ナル如キδノ上限ヲρ_xトスル。

若シモアル一点xニ對シテ$\rho_x=\infty$デアレバGが separabel トナッテ定理が成立スルカラ常ニ$\rho_x<\infty$ト假定シテモ差支ナイ。

今aヲGノ一点トスル。$S(a,\frac{1}{2}\rho_a)$ハ separabel デアルカラココニ於テ dicht ナ可附番集合

ル。Urysohn ノ定理ニヨリG十ξ(シタがッテG)が metrisierbar デアル。

各々ノGノ Metrik ρ_Gが定マレバ$\rho_G^*=\frac{\rho_G}{1+\rho_G}$トオキ、$x, x'$が同ジGニ属スルトキハ$\rho(x,x')=\rho_G(x,x')$, 異ルGニ属スルトキハ$\rho(x,x')=1$トオケバR全体ノ Metrik が得ラレル。

$$D_a = \{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_i, \cdots\cdots\}$$

が存在スル。$a_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k}$ が既ニ定マッタトキ $S(a_{i_1, i_2, \cdots\cdots i_k}, \frac{1}{2}\rho a_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k})$ ニ於テ dicht ナ可附番集合

$$D a_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k} = \{a_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k, 1}, a_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k, 2}, \cdots\cdots, a_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k, i_{k+1}}, \cdots\cdots\}$$

が存在スル。

$$D = D_a + \sum D_{a_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k}}$$

$$S = S(a, \frac{1}{2}\rho_a) + \sum S(a_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k}, \frac{1}{2}\rho_{a_{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k}})$$

トオク。ココニ $\sum$ ハ何レモアラユル $\{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots\cdots)$ ノ組ニ對スル和ヲ表ハス。明カニ D ハ可附番集合、S ハ開集合デアリシカモ D ハ S ニ於テ überall dicht デアル。

ヨッテ $S = G$ ナルコトヲ示セバ証明ハ完結スル。G ハ zusammenhängend デアルカラ S が開集合デアルト同時ニ閉集合デアルコトヲ示セバヨイ。

コノタメニハ S ノ任意ノ集積点 x が S ニ含マレルコトヲ云ヘバヨイ。

$x \in S'$ デアルカラ x ノ近傍 $S(x, \frac{1}{6}\rho_x)$ ハ S ノ点ヲ、シタがッテ D ノ点ヲ少クトモ一ツ含ム。コレヲ a_* トセヨ。$S(a_*, \frac{1}{3}\rho_x) \subset S(x, \frac{1}{2}\rho_x)$ デアルカラ $S(a_*, \frac{1}{3}\rho_x)$

ハ separabel デアル。即チ

$$\frac{1}{3}\rho_x < \rho_{a_*}$$

故ニ

$$\rho(x, a_*) < \frac{1}{6}\rho_x < \frac{1}{2}\rho_{a_*}$$

ヨッテ

$$x \in S\left(a_*, \frac{1}{2}\rho_{a_*}\right) \subset S \qquad \text{（証明終）}$$