326. 行列方程式 $e^X = A$ ノ解ニ就テ

淺野啓三（阪大）

複素数体ニ於ケル n 次ノ Matrix ヲ取扱フ。Matrix A ノ Det. $|A| \neq 0$ ナラバ $e^X = A$ ハ解ヲ有スル。（紙上数学談話會 309, 310 ノ論文参照）。以下此ノ解ニツイテシラベル。

定理 Matrix $xE-B$ ノ Elementalteiler（1ト異ル）ヲ $(x-\omega_1)^{p_1}, \cdots\cdots, (x-\omega_m)^{p_m}$ （$p_1+\cdots\cdots+p_m=n$）トスレバ

$$xE - A \quad \left(A = e^B = E + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{B^\gamma}{\gamma!}\right)$$

ノ Elementalteiler ハ $(x-e^{\omega_1})^{\rho_1}, \cdots\cdots, (x-e^{\omega_m})^{\rho_m}$ デアル。

Lemma: n 次ノ Matrix

$$\begin{pmatrix} x & & & & 0 \\ \alpha_1 & x & & & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 & x \end{pmatrix} \qquad (\alpha_1 \neq 0)$$

ノ Elementalteiler ハ $x^n, 1, \cdots\cdots 1$ デアル。

何トナレバ此ノ Matrix ノ Det. ハ x^n, $n-1$ 次ノ Minor ノ最大公約数ハ

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ \alpha_{n-1} & & \ddots & \alpha_1 \end{vmatrix} = \alpha_1^{n-1} + c_1 x + \cdots\cdots \qquad (\alpha_1^{n-1} \neq 0)$$

及ビ

$$\begin{vmatrix} x & & & 0 \\ \alpha_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1 & x \end{vmatrix} = x^{n-1}$$

ノ公約数ニナルコトカラ 1 ニ等シイ。従ッテ Elementalteiler ハ $x^n, 1, \cdots\cdots, 1$ ニナル。

定理ノ証明:

仮定ニヨリ

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}, \quad B_i=\begin{pmatrix} \omega_r & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \omega_r \end{pmatrix} \quad (\text{次数 } \rho_r)$$

トナル Matrix P ガ存在スル Elementalteiler ハ Matrix ヲ transform シテモ変ラナカラ A ノ代リニ $P^{-1}AP=e^{P^{-1}BP}$ ヲ使フ.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} e^{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{B_m} \end{pmatrix},$$

$$B_r=\omega_r E_r+F_r$$

$$E_r=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad F_r=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_r^{\rho_r}=0$$

$\omega_r E_r$ ト F_r ハ kommutativ ナル故

$$e^{B_r}=e^{\omega_r E_r}e^{F_r}=e^{\omega_r E_r}\left(E_r+\frac{F_r}{1!}+\cdots\cdots+\frac{F_r^{\rho_r-1}}{(\rho_r-1)!}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} e^{\omega_r} & & & 0 \\ e^{\omega_r} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{e^{\omega_r}}{(\rho_r-1)!} & \cdots & e^{\omega_r} & e^{\omega_r} \end{pmatrix}$$

$xE_r-e^{B_r}$ ノ Elementalteiler ハ lemma ニヨリ $(x-e^{\omega_r})^{\rho_r}$, $1, \cdots\cdots, 1$ トナル、コノコトカラ定理ノ成立スルコトガ分ル.

（証明終リ）

$e^X = A$ ノ解ガ存在スルタメニハ $|A| \neq 0$ トナルコトハ明カデアル、今 $|A| \neq 0$ トスル．$xE - A$ ノ *Elementalteiler* ヲ

$$(x-\lambda_1)^{\rho_1}, \cdots\cdots, (x-\lambda_m)^{\rho_m}$$

トスレバ $|A| \neq 0$ ナル故 $\lambda_r \neq 0$

$$(x-\omega_1)^{\rho_1}, \cdots\cdots, (x-\omega_m)^{\rho_m} \qquad (\omega_r = \log \lambda_r)$$

ヲ *Elementalteiler* トスル Matrix

$$X_0 = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}, \qquad B_r = \begin{pmatrix} \omega_r & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \omega_r \end{pmatrix} \Big\} \rho_r$$

ヲ作ル．ω_r ノ取リ方ハ $2\pi i$ ノ整数倍ニ関シテ自由デアルガ e^{X_0} ハ一意ニ定リ，A ト *Elementalteiler* ガ一致スル．

$$e^{X_0} = A^* = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix} \qquad A_r = \begin{pmatrix} \lambda_r & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \frac{\lambda_r}{(\rho_r-1)!} & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

故ニ $A = P^{-1}A^*P = e^{P^{-1}X_0P}$ トナル P ガ存在スル．P ヲ A^* ヲ A ニ *transform* スル任意ノ Matrix トシ，X_0 ヲ任意ニ上ノ様ニトレバ $P^{-1}X_0P$ ガ一般解ニナル、P ハ P_0Q ノ形ニ書ケル、コヽニ P_0 ハ A^* ヲ A ニ *transform* スル一ツノ Matrix デ $Q(|Q| \neq 0)$ ハ A ト可換ナル任意ノ Matrix デアル。

今 Matrix ノ Element ヲ実数ノミニ制限スレバ次

ノ様ニナル。

定理: $e^X = A$ ガ実数体ノ範囲デ解ヲ有スルタメニハ $xE-A$ ノ Elementalteiler $(x-\lambda_1)^{\rho_1}, \cdots\cdots, (x-\lambda_m)^{\rho_m}$ ガ conjugate complex ノ pair ニナルカ（λ ガ real ナラバ同ジモノガ pair ニナル）pair ニナラナイモノニ対シテハ λ ガ real positive ナルコトガ必要且ツ充分デアル。

reelle Matrix ノ Elementalteiler ハ Eigenwert ガ complex ニナルモノハ conjugate complex ノ pair カラ成ル. 従ッテ上ノ條件ノ必要ナコトハ始メノ定理カラ容易ニ分ル. 今コノ條件ガ満足サレテオルモノトスル。

$xE-A$ ノ Elementalteiler ヲ

$$(x-\lambda_r)^{\rho_r} \quad (r=1, \cdots\cdots, m_1) \quad (\lambda_r \text{ real pos.})$$

$$(x-\lambda_s)^{\rho_s} \quad (x-\bar{\lambda}_s)^{\rho_s}, \quad (s=m_1+1, \cdots\cdots, m_1+m_2)$$

（conjugate complex, $\lambda_s = \bar{\lambda}_s$ トナル場合モ含メル）トスル。

$\omega_r = \log \lambda_r$ real, $\omega_s = \log \lambda_s$, $\bar{\omega}_s = \log \bar{\lambda}_s$ conjugate complex ニナル様ニトリ（$\omega_s = \bar{\omega}_s$ トナッテモヨイ）次ノ如ク $(x-\omega_r)^{\rho_r}$, $(x-\omega_s)^{\rho_s}$, $(x-\bar{\omega}_s)^{\rho_s}$ ヲ Elementalteiler トスル reelle Matrix X_0 ヲ作ル。

$$E_l = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}^{\rho_l}, \quad F_l = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\rho_l} \quad (1 \leqq l \leqq m_1+m_2)$$

トシ

$$B_r = \omega_r E_r + F_r$$

$$B_s = U_s \begin{pmatrix} \omega_s E_s + F_s & 0 \\ 0 & \overline{\omega}_s E_s + F_s \end{pmatrix} U_s^{-1}, \quad U_s = \begin{pmatrix} iE_s & -iE_s \\ E_s & E_s \end{pmatrix}$$

トスル。$\omega_s = \alpha_s + \beta_s i$ トスレバ

$$B_s = \begin{pmatrix} \alpha_s E_s + F_s, & -\beta_s E_s \\ \beta_s E_s, & \alpha_s E_s + F_s \end{pmatrix}$$

トナッテ B_s ハ *reelle Matrix*. ソノ *Elementalteiler* ハ $(x-\omega_s)^{\rho_s}$, $(x-\overline{\omega}_s)^{\rho_s}$ デアル。

$$X_0 = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{m_1+m_2} \end{pmatrix}$$

然ルトキハ

$$A_r = e^{B_r} = \lambda_r e^{F_r} = \begin{pmatrix} \lambda_r & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\lambda_r}{(\rho_r - 1)!} & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$$A_s = e^{B_s} = U_s \begin{pmatrix} e^{\omega_s E_s + F_s} & 0 \\ 0 & e^{\overline{\omega}_s E_s + F_s} \end{pmatrix} U_s^{-1}$$

$$= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} iE_s & -iE_s \\ E_s & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_s e^{F_s} & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_s e^{F_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s & iE_s \\ -E_s & iE_s \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_s = a_s + b_s i)$$

$$= \begin{pmatrix} a_s e^{F_s} & -b_s e^{F_s} \\ b_s e^{F_s} & a_s e^{F_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{pmatrix} \times e^{F_s}$$

故ニ

$$A^* = e^{X_0} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{m_1+m_2} \end{pmatrix}$$

ハ ω_ℓ ノ取リ方ニカヽハラズ一定スル、且又 A^* ト A ハ Elementalteiler ガ一致スル、何レモ real ナ Matrix デアルカラ

$$A = P^{-1}A^*P = e^{P^{-1}X_0P}$$

トナル reelle Matrix P ガ存在スル。

前ト同様ニ P ヲ A^* ヲ A ニ transform スル任意ノ reelle Matrix トシ、X_0 ヲ任意ニ上ニ述ベタヤウニトレバ $P^{-1}X_0P$ ガ一般解トナル。

尚南雲氏ノ得ラレタ結果（全、紙、数、談 310）カラ次ノ定理ヲ得ル。

定理：　実数体ニ於ケル n 次ノ Matrix ノナス Ring ニ於テ Matrix A ヲ含ム連結ナ abel 群ガ存在スルタメニ必要且ツ充分ナル條件ハ A ノ Elementalteiler ガ前定理ノ條件ヲ満足スルコトデアル。