325. 4-Kurvenscharen ノ Invariant ニツイテ

栗田　稔（東大學生）

§1. 平面上ニアル四ツノ Kurvenscharen

$$(1)\qquad L_i = \varphi_i(u,v)\,du + \psi_i(u,v)\,dv = 0$$
$$i = 1, 2, 3, 4$$

ガ與ヘラレテ居テ之ガ geflecht ヲナシテ居ル，即チドノ三ツノ Scharen モ Kurvengewebe ヲナシテ居ル場合ニツイテ考ヘマス。

但シ出テ來ル u, v ノ函數ハ必要ナダケ微分可能トシ

マス。

今 $\overline{T}$: $u = u(\bar{u}, \bar{v}) \qquad v = v(\bar{u}, \bar{v})$

T^*: $L_i^* = \lambda_i L_i \qquad \lambda_i = \lambda_i(u, v)$

ナルニツノ変換ニ對スル geflecht (1) ノ第一級ノ Invariant ハ本質的ニハ

$$V = \frac{D_{13}\,D_{24}}{D_{14}\,D_{23}} \qquad \text{但シ} \quad D_{ik} = \begin{vmatrix} \varphi_i & \varphi_k \\ \psi_i & \psi_k \end{vmatrix}$$

ヨリ他ニナイコトハ Blaschke モ注意シテヰル所デス。

$$\text{次ニ} \quad \Gamma_i = \psi_i \frac{\partial}{\partial u} - \varphi_i \frac{\partial}{\partial v} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

ナル Operatoren ヲシラベテミマスト

$$\overline{T}\text{デハ} \quad \overline{\Gamma}_i = \vartheta \Gamma_i \qquad \text{コヽニ} \quad \vartheta = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

$$T^*\text{デハ} \quad \Gamma_i^* = \lambda_i \Gamma_i$$

$$\text{ソコデ} \qquad Q_1^6 = \frac{(D_{12} D_{13} D_{14})^2}{D_{23} D_{34} D_{42}}$$

ナルモノヲ作ツテミマスト

$$\overline{T}\text{デハ} \quad \overline{Q}_1^6 = \frac{\vartheta^6 (D_{12} D_{13} D_{14})^2}{\vartheta^3 D_{23} D_{34} D_{42}} = \vartheta^3 Q_1^6$$

$$T^*\text{デハ} \quad (Q_1^6)^* = \frac{\lambda_1^6 (\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)^2 (D_{12} D_{13} D_{14})^2}{(\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)^2 \; D_{23} D_{32} D_{42}} = \lambda_1^6 Q_1^6$$

従ツテ新タニ $\frac{1}{Q_1}\Gamma_1$ ヲ Γ_1 トオクコトニスルト

$$\overline{T}: \quad \overline{\Gamma}_1 = \sqrt{\vartheta}\,\Gamma_1 \qquad\qquad T^*: \quad \Gamma_1^* = \Gamma_1$$

同様ニシテ

$$Q_2^6 = -\frac{(D_{21}D_{23}D_{24})^2}{D_{13}D_{34}D_{41}} \quad Q_3^6 = -\frac{(D_{31}D_{32}D_{34})^2}{D_{12}D_{24}D_{41}} \quad Q_4^6 = \frac{(D_{41}D_{42}D_{43})^2}{D_{12}D_{23}D_{31}}$$

カラ

$$\frac{1}{Q_2}\Gamma_2, \quad \frac{1}{Q_3}\Gamma_3, \quad \frac{1}{Q_4}\Gamma_4$$

ヲ作リ之ヲ新タニ Γ_i $(i=2,3,4)$ トオクト之等ハ Γ_1 ト全ク同様ノ変化ヲスル。従ツテコレラノ四ツノ Operatoren ハ Ralativ invariante Operatoren デス、以下 Γ_i ハコヽニアゲタ意味トスル。

以上ノコトカラ geflecht ノ二次ノ Invariant ニハ

$$\text{relativ:} \quad \Gamma_i \nu \quad (i=1,2,3,4)$$

$$\text{absolut:} \quad \frac{\Gamma_i \nu}{\Gamma_k \nu} \quad (i,k=1,2,3,4)$$

ガアルコトガワカリマス. 尤モコレ以外ニアルカドウカハ之ダケデハワカリマセン。

Γ_i ノ間ニハドンナ関係ガアルカハ (1) ヲ特殊ナ形

$$L_1 = du, \quad L_2 = dv, \quad L_3 = du + \psi\, dv$$

$$L_4 = \varphi\, du + dv$$

ニトッテ考ヘテミレバ差支ヘアリマセンカラ、之カラシラベテミマスト

$$\Gamma_1 = \frac{\Delta}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial}{\partial v} \quad \Gamma_2 = \frac{\Delta}{\sqrt{-\varphi}}\frac{-\partial}{\partial u} \quad \Gamma_3 = \frac{\Delta}{\sqrt{-(1-\varphi\psi)}\,\psi}\left(\psi\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$\Gamma_4 = \frac{\Delta}{\sqrt{(1-\varphi\psi)}\,\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \varphi\frac{\partial}{\partial v}\right)$$ Δハアル u,v ノ函數

従ッテ $\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2+\Gamma_4^2=0$

§2. Mayrhoffer 氏ハ Topologische Fragen der Differentialgeometrie III (Math. Zeit. 28) 及ビ IX (Hamburg VII) ニ於テ

Sechseckgeflecht ハ次ノイヅレカニ topologisch äquivalent ナルコトヲ示シテヰル、即チ

1° 4-Wellenbüscheln von Strahlen

2° 3- 〃 〃 〃 und 1-eigentlicher Strahlbüschel

3° 2- 〃 〃 〃 und 2- 〃 〃

ソコデ Mayrhofer 氏ハコノ 1°, 2°, 3° ガ topologisch ニ äquivalent デナイコトヲ幾何学的ニ証明サレテヰルガ之ハ上記ノ Operator ニヨレバ

1° $\Gamma_i\nu\equiv 0 \qquad \Gamma_k\nu=0 \qquad i\neq k$

即チ $\nu=konst$

2° $\Gamma_4\nu\equiv 0 \qquad \Gamma_i\nu\neq 0 \qquad \nu=1,2,3$

3° $\Gamma_i\nu\neq 0 \qquad i=1,2,3,4$

之レカラモ豫想サレル様ニ 2° デハ eingentlich ナモノガ固定シテヰルケレドモ 3° デハ固定シテヰナイ、即チ適當ナ変換ヲ用ヒレバ勝手ナ二ッヲ eigentlich ニスルコトガ出來マス。之ハ容易ナコトダカラ省イテオキマス。

§3. 以上ノコトハ二次元ノ場合ハ ν ガ一点カラ $L_i=0$ ニヒイタ四ッノ切線ノ方向ノ非調和比ナルコトカラ考ヘレバ極メテ當然ノコトデセウガ三次元ノ場合ヲ考ヘルト Topologische Fr. d. Diff. geo. X (Blaschke) ノ補足トナリ多少意味ヲモッテ來ル様ニ思ハレマス。

§4. ν ヲ用ヒルト次ノ trivial ナ結果ガ出マス。

Sechseckgeflecht ガ Diagonale Netze ヲナスタメノ必要十分條件ハ $\nu=-1$ ナルコトデアル。

—— 11. 1. 8 ——