

315. 函数空間 = 於ケル距離付ケ不能ナ一例

南雲道夫 (阪大)

□1 抽象空間論 = ツイテ門外漢デアル私ハ次ノコトヲ本紙 = 載セテ、識者ノ御教示ヲ仰ギタク思ヒマス。(問題ノ内容カラ見テ既 = 有名ナ事實デアル様 = 想像サレマス)

函数集合 = 距離ヲバ適當 = 定義スルコト = ヨリ、一樣收斂々平均收斂等便利ナ方法ガ函数体系ノ理論 = 用ヒラレテキル。

之等ハ距離ガ定義サレテキルカラ、抽象空間論 = 於ケル 距離空間デアル。

所ガ抽象空間論 = 於テハ (極限ノ概念ヲバ主眼トスルカラ) 連続寫像 (位相幾何学的変換) = 於イテ 不変性ヲ持タヌ 距離ヲバ抽象法ニ只一聯ノ公理体系 = ヨリ抽象的 = 近傍ナル概念ヲ導入スル。Hausdorffノ近傍系ハ之デアル。(今日ノ抽象空間論ハモット極端 = 抽象化サレテキル)

然シ解析論 = 於ケル距離ガ持ツ意味ハ重大デ、抽象空間論 = 於ケル如ク、之レヲ直チ = 抽象シ去ルコトハ一般 = ハ許サレナイ。(Hilbert空間論 = 於ケル inner product

、重要性、如シ)之レヲ抽象シ去ル必要サヘ生ジナケレバ、
距離ヲ保留シ活用スルコトガ有意義デアレ。所ガ解析論=於
テ距離付ケ、不可能ナ場合ガ存在スル!

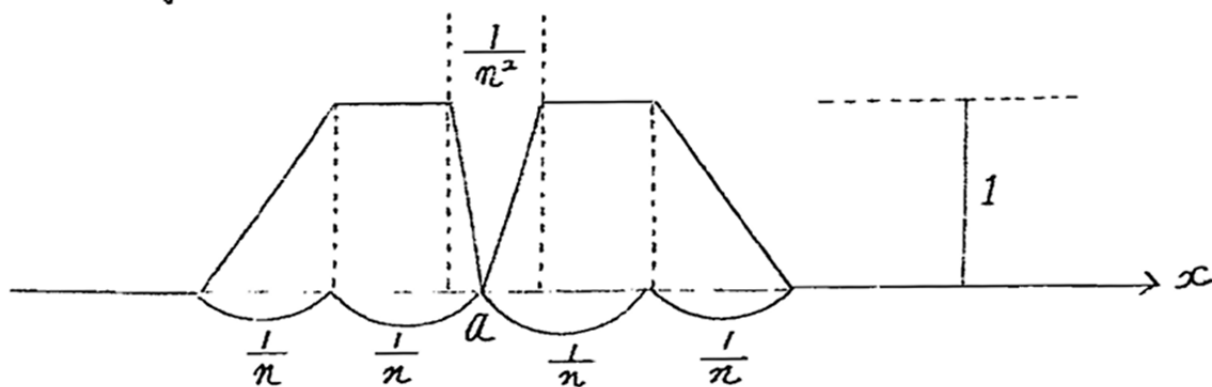
此ノ場合トハ(一般、解析論=於テハ)特別=病理的ナ
場合デアハナク、ムシロ普通ノ場合トデアレ。次=之レヲ示
サウ。

② 實數開區間 $\alpha \leq x \leq \beta$ = 於テ定義サレタ實數値
ヲ取ル連続函数 $y = f(x)$ 、集合ヲ \mathcal{F} トスル。 \mathcal{F}
内=於ケル一般ノ收斂、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = F(x) \in \mathcal{F}$ 、 \mathcal{F}
特徴付ケルヤウナ \mathcal{F} 、距離付ケハ不可能デアレ! [\mathcal{F}
ハ一様有界デアヨイ。]

(註) 上=言フ一般ノ收斂トハ、 $\alpha \leq x \leq \beta$ = 於ケル各
 x =ツキ $f_n(x)$ ガ $F(x)$ =收斂スルコトデアレ。(従ツテ
一様收斂デアハナイ。)

(証明) 距離付ケ不能ナ一例ヲ示セバヨイ。

$y = f_n(x, a)$ ヲ、右ノ如キ函数トスル。



然ラバ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, a) = 0$. 故= $y = f_n(x, a)$ ト
 $y=0$ ト、距離ヲ $\rho(n, a)$ トスレバ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, a) = 0$.

今任意、自然数 $m =$ 對シテ、各 $a =$ ツキ $\rho(n, a) < \frac{1}{m}$
 且ツ $n > 2^m$ ナルヤウ $= n(a, m)$ ナ定メル。各点 $x = a$
 ナ中心トスル幅 $\frac{2}{n(a, m)}$ ナル閉區間ヲ I_a^m ナ示ス。Borel
 ノ被覆定理ニヨリ、(m ナ一定トスル時) 閉ナタ區間 $[\alpha, \beta]$
 ハ有限個、 I_a^m ナ覆ハレル。

從ツテ $f_n(x, a)$ 及ビ $n(a, m)$ ノ定義ニヨリ、 $[\alpha, \beta]$
 ナラ長サノ總和ガ $\frac{\beta - \alpha}{2^m}$ 以下ナル有限個ノ閉區間ヲ除イタ
 残リノ閉集合 $\mathcal{M}_m =$ 於テ、ソノ任意ノ一点ニ對シテハ必ズ
 $f_n(x, a) = 1$ ナルヤウナ函数ガ存在スル。總テノ閉集合
 $\mathcal{M}_m (m = 1, 2, 3, 4, \dots)$ ノDurchschnittハ空
 ナイ閉集合ナイル。

從ツテソノ一点ヲ $x = \xi$ トスレバ $x = \xi =$ 於テ

$$f_{n(a, m)}(\xi, a) = 1 \quad (a \wedge \xi = \text{從屬スル})$$

ナルヤウナ函数ガ存在スル (各 $m =$ ツキ)。所ガカナル函
 數ニツイテハ $\rho(n, a) < \frac{1}{m}$ 。從ツテ $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(n, a) = 0$ 。

故ニ $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n(a, m)}(x, a) = 0$ ナラケレバナラヌ (若
 シモ一般ノ收斂ノ特徴付ケガ可能ナラバ) 之ハ $x = \xi =$ 於
 テ

$$f_{n(a, m)}(\xi, a) = 1$$

ナルコトト相容レナイ。即チ一般ノ收斂ヲ特徴付ケルヤウナ
 距離付ケハ不可能ナイル。

[3] 以上ノ証明ナハ距離ニ關スル三角不等式ニモ全然
 用ヒラレテキナイ。從ツテ距離空間ニ於テ距離ニ關スルニ

角不等式ヲ捨テ、モ一般ノ收斂ヲ距離化スルコトハ不可能デア
ル。

以上、問題ハ抽象空間論ニ於ケル距離化ノ理論(必充條
件)カラ見レバ、平凡ナ一例題ニスギナイデアラウ。茲ニ今
更ナカラ私ノ平素ノ不勉強ヲ告白セザレテ得ナイ。

上ノ如クニ、一般ノ收斂ヲ特徴付ケルマウナ距離ノ定義
ガ不可能ナコトガ分ツテ見レバ、近年 Tychonoff が一般
ノ收斂ヲ特徴付ケルマウナ (Hausdorffノ意味) 近傍ヲ
定義シタコトノ意義ガ解ル様ナ氣ガスル。

(Math. Ann 102.) 尚 Tychonoffノ近傍ノ定義ニ
ヨレバ 一樣ニ有界ノ函数集合ガ 緊ニナル (compact) 訳
ノツモリ、少シ調子ガ悪イ訳だが、意味ハ之ガヨクアテハマ
ルト思フ) 事ニナル。之ハ實ニ注目スベキコトデアアル!! 然
シ此ノ近傍ノ意味ニ於ケル汎函数、連続性ハ本質的ニハ *Vol-*
*l**stetigkeit* デアル様ニ思ハレルノデ、應用上ノ範圍ガ果
シテドノ位廣イモノデアアルカハ私ニハ未ダ疑問デアアル。

—— 以上 ——