

314. Bieberbach, Drehungssatz = 就テ

城 憲 ≡ (阪大工)

§ 1. 等角寫像論 = 於ケル Bieberbach, Drehungssatz = 就キ, 以前 = 私ハ想像ヲ交ジヘテ愚論ヲ述ベタコト
ガアリ, 一度ソノ申譯ヲスル責任ガアルト思フテキタノマス
ガ, 今度ハドウヤラ成功シタマウテスカラ見テ頂キタイト思
ヒマス。考ヘハ前ノト全然関係アリマセヌ。ツマリ新シク証

明法ヲ発見シタコト = ナリマス。私ノ考ヘバカリブナク、ヤ
ハリコノ *Satz*、熱心ナ研究者 M. Kössler = 頂フトコロ
甚大マス、私ハ Kössler、缺点ヲ見ツケルコトが出来、彼
ノ理論ヲ修正シタ = 過ギマセヌ。以下、概論ト Kösslerノ
論文トヲ對照シテ下サレバ、スベテガ分明 = ナルカト存ジマ
ス。

$$(1) f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

ヲ $|z| < 1$ デ正則單葉函数トスル、コノ集合ヲ S トスル。我
々ノ問題ハ集合 S 中デ $\arg f'(z)$ 、grösste Max. ヲ求
メルコトデ

$$\text{Max}_{|z| \leq r, f \in S} |\arg f'(z)| \quad (0 \leq r < 1)$$

ハ如何 = 表ハサレルカト云フコトデアル。斯様ナ Grenze
ノ函数ガ S 中ノ $f(z)$ デアリトスレバ (存在スル) $\arg f'(z)$
 $f \in S$
ノ Kleinste Min. ノオコル函数 $f_1(z)$ ハ $f(z)$ カラ次ノ
様 = スグ合カル。

何故ヲラバ

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

$$f_1(z) = z + \bar{a}_2 z^2 + \bar{a}_3 z^3 + \dots,$$

トスレバ $f_1(z)$ ハ勿論 $|z| < 1$ デ正則單葉デ

$$\arg f'(z) = \arg \overline{f_1'(\bar{z})} = -\arg f_1'(\bar{z}), \quad |z| < 1$$

デアルカラデアル。

$$(2) \text{Max}_{|z| \leq r, f \in S} |\arg f'(z)| \leq \varphi(r)$$

+ 正確な Schranke $\varphi(r)$ を今まで求められず不完全な結果に次、通りがす。

$$1^\circ \quad \varphi(r) = 2 \log \frac{1+r}{1-r}, \quad (\text{Bieberbach})^{1)}$$

$$2^\circ \quad \varphi(r) = \int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2} dx, \quad (\text{Kössler})^{2)}$$

$$3^\circ \quad \varphi(r) = 2|a_2|r + \frac{3}{2}r \log \frac{1+r}{1-r} \quad (\text{Kössler})^{3)}$$

この次の定理を証明スル。

定理 1. $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ $|z| < 1$ 正則單葉函数トシタルトキハ

正則單葉函数トシタルトキハ

$$(3) \quad \left| \arg f(z) \right|_{|z| \geq r} \leq 2|a_2|r + \frac{3}{2}r \log \frac{1+r}{1-r} \eta,$$

この η は $0 < \eta < 1$ かつ $a_2 =$ 関係スル常数デアル。但し

a_2 の函数

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad z^2 \text{ の係数}$$

§2. 証明第一段。

K. Löwner = 従ハル, $\chi(\tau)$ $|\chi(\tau)| = 1$ ($\tau \geq 0$)

+ 連続函数トシテ

$$(4) \quad a_2 = -2 \int_0^\infty \chi(\tau) e^{-\tau} d\tau, \quad a_3 = 4 \left(\int_0^\infty \chi(\tau) e^{-\tau} d\tau \right)^2 - 2 \int_0^\infty \chi^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau$$

ト表ハスコトが出来ル。従ッテ次、基本関係式が得ラレル。

1) Math. Zeitschr., 4(1919), 295-305.

2) Jahresbericht der D.M.V., 41(1931), 80-82.

3) Věstn. české Spol. Nauk, (1932).

$$(5) \quad a_2^2 - a_3 = 2 \int_0^{\infty} \chi^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau.$$

$$\text{変換: } F(\xi) = \frac{f\left(\frac{\xi+\alpha}{1+\bar{\alpha}\xi}\right) - f(\alpha)}{f'(\alpha)(1-|\alpha|^2)} = \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \dots \quad (|\alpha| < 1)$$

=ヨレバ $F(\xi)$ は $|\xi| < 1$ = 於ケル正則單葉函数ナ

$$A_2 = \frac{f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)}{2f'(\alpha)} - \bar{\alpha},$$

$$A_3 = \frac{1}{6} \left[\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} (1-|\alpha|^2)^2 - 6 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \bar{\alpha} (1-|\alpha|^2) + 6\bar{\alpha}^2 \right]$$

從ツテ

$$\begin{aligned} A_2^2 - A_3 &= \frac{f''(\alpha)^2 (1-|\alpha|^2)^2}{4f'(\alpha)^2} + \bar{\alpha}^2 - \frac{\bar{\alpha} f''(\alpha) (1-|\alpha|^2)}{f'(\alpha)} \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} (1-|\alpha|^2)^2 + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \bar{\alpha} (1-|\alpha|^2) - \bar{\alpha}^2 \\ (6) \quad &= - \frac{f'''(\alpha) (1-|\alpha|^2)^2}{6f'(\alpha)} + \frac{f''(\alpha)^2 (1-|\alpha|^2)^2}{4f'(\alpha)^2} \end{aligned}$$

(6) = 於テ, 基本関係式 (5) を適用スルト, α を代リ =
 z ($z = re^{i\theta}$, $|z| \leq r < 1$) ト書キ

$$- \frac{f'''(z) (1-|z|^2)^2}{6f'(z)} + \frac{f''(z)^2 (1-|z|^2)^2}{4f'(z)^2} = 2 \int_0^{\infty} \chi^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau$$

トオキ得ル $\chi(\tau)$ ($|\chi(\tau)| = 1$, $\tau \geq 0$) が存在スル。或ハ

$$(7) \quad 2z^2 \frac{f''(z)}{f'(z)} - 3z^2 \frac{f''(z)^2}{f'(z)^2} = \frac{-24z^2}{(1-|z|^2)^2} \int_0^{\infty} \chi^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau.$$

次ノ様ナ函数 $v(z)$ を考ヘテ見ル。

$$(8) \quad v(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \mathcal{R}(v) + i\mathcal{I}(v).$$

$f'(z) \neq 0$ ナルカラ $v(z)$ は $|z| < 1$ ナ正則ナル、コトニ、

$$\mathcal{R}(v) = 1 + \mathcal{R}\left(z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right), \quad I(v) = I\left(z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right).$$

而シテ

$$z \frac{f''(z)}{f'(z)} = z \frac{d}{dz} \log f'(z) = -i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f'(z),$$

$$\log f'(z) = \log |f'(z)| + i \arg f'(z).$$

従ツテ,

$$(9) \quad \mathcal{R}(v) = 1 + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \arg f'(z); \quad I(v) = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log |f'(z)|.$$

次 = (8) = ヨツテ

$$\begin{aligned} 2z v'(z) - v^2(z) + 1 &= 2z \left(\frac{f''}{f'} + z \frac{f''' f' - f''^2}{f'^2} \right) - \left(1 + z \frac{f''}{f'} \right)^2 + 1 \\ &= 2z \frac{f''}{f'} + 2z^2 \frac{f'''}{f'} - 2z^2 \frac{f''^2}{f'^2} - 1 - 2z \frac{f''}{f'} - z^2 \frac{f''^2}{f'^2} + 1 \\ &= 2z^2 \frac{f'''}{f'} - 3z^2 \frac{f''^2}{f'^2}. \end{aligned}$$

コノ結果ハ (7)ノ左辺ト一致スルカラ

$$(10) \quad 2z v'(z) - v^2(z) + 1 = \frac{-24z^2}{(1-|z|^2)^2} \int_0^\infty \mathcal{K}^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau,$$

$z v'(z) = -i \frac{\partial}{\partial \vartheta} v(z)$ ナルカラ (8) = ヨツテ

$$\begin{aligned} 2z v'(z) - v^2(z) + 1 &= -2i \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\mathcal{R}(v) + iI(v)) \\ &\quad - (\mathcal{R}(v) + iI(v))^2 + 1 \\ &= -2i \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \vartheta} + 2 \frac{\partial I}{\partial \vartheta} - \mathcal{R}^2 - 2i\mathcal{R}I + I^2 + 1 \end{aligned}$$

トナルカラ (10)ノ式ハ次ノ様ニナル。

$$2 \frac{\partial I}{\partial \vartheta} - 2i \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \vartheta} - \mathcal{R}^2 - 2i\mathcal{R}I + I^2 + 1 = \frac{-24z^2}{(1-|z|^2)^2} \int_0^\infty \mathcal{K}^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau.$$

上式ノ實數部分, 虛數部分ヲ等置シテ

$$(11) \quad 2 \frac{\partial I}{\partial \varphi} + I^2 + 1 - R^2 = \mathcal{R} \left[\frac{-24r^2 e^{i2\varphi}}{(1-r^2)^2} \cdot \int_0^\infty \chi^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau \right],$$

$$(12) \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \mathcal{R}I = \mathcal{I} \left[\frac{12r^2 e^{i2\varphi}}{(1-r^2)^2} \cdot \int_0^\infty \chi^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau \right].$$

我々ハ (12)ノ 應用ヲ考ヘテ 行クノ デアルガ, 途中再々 Cauchy-Riemannノ 關係式

$$(13) \quad r \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial I}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial I}{\partial r}$$

ヲ用フ。

§ 3. 証明第二段

$|z| = r$ ($0 \leq r < 1$) ナル r ヲ 任意ニキメテ z ハ $|z| = r$ 上ニアルトスル。 $\arg f'(z)$ ガ $\text{Max} = +$ ル様ト $\varphi =$ 對シテハ



$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f'(z) = 0$$

デアアルカラ, カナル φ ヲ fix シ $\text{Max}_S \arg f'(z) = \arg f'(re^{i\varphi})$ トシヨク。 $S =$ 屬スル任意ノ 函数 f 上, $\varphi =$ 對シ

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f'(z) = 0$$

トシテオク。(可能) コノトキハ (9)ヨリ $\mathcal{R}(v) = 1$. 從ツテ (12)ヨリ

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} + I = \mathcal{I} \left[\frac{12r^2}{(1-r^2)^2} \int_0^\infty \chi^2(\tau) e^{i2\varphi} e^{-2\tau} d\tau \right], \quad \varphi \text{ハ一定}$$

關係式 (13)ヲ 用ヒテ 上式ハ

$$-r \frac{\partial I}{\partial r} + I = \int_0^{\infty} \left[\frac{12r^2}{(1-r^2)^2} \chi^2(\tau) e^{i2\varphi} e^{-2\tau} d\tau \right]$$

トナリ或ハ

$$(14) \quad r \frac{\partial I}{\partial r} - I = \int_0^{\infty} \left[\frac{-12r^2}{(1-r^2)^2} \chi^2(\tau) e^{i2\varphi} e^{-2\tau} d\tau \right].$$

サテ, 又 (13) = ヲリ

$$2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\arg f'(z)}{r} = 2 \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| = 2(a_2 e^{i\varphi} + \bar{a}_2 e^{-i\varphi}) + (r),$$

コト = (r) ハ Ordnung r, Gliederヲ表ハス. 特 =

r=0, トキ, ϕ, 値ヲ求メルト,

$$(15) \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \arg a_2, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2} - \arg a_2.$$

且ツ又

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \log |f'(z)| = i(a_2 e^{i\varphi} - \bar{a}_2 e^{-i\varphi}) + (r)$$

テアツテ $\frac{I(v)}{r}$ ハ r=0, トキハ (a), 故: $I(v) = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \log |f'(z)|$

= ヲツテ $2|a_2|$ 又ハ $-2|a_2|$. $\frac{I(v)}{r} = K(r, \varphi)$ トオケバ

$$I(v) = r \cdot K(r, \varphi)$$

テ

$$r \frac{\partial I}{\partial r} - I = r \left(K(r, \varphi) + r \frac{\partial K}{\partial r} \right) - I = r^2 \frac{\partial K}{\partial r}.$$

即チ (14) = ヲリ

$$(16) \quad \frac{\partial K}{\partial r} = \int_0^{\infty} \left[\frac{-12}{(1-r^2)^2} \chi^2(\tau) e^{i2\varphi} e^{-2\tau} d\tau \right]$$

(16) = 於イテ

$$\chi(\tau) = e^{i\vartheta(\tau)} = \cos \vartheta(\tau) + i \sin \vartheta(\tau),$$

$$\left| \int_0^\infty -\chi^2(\tau) e^{i2\varphi} e^{-2\tau} d\tau \right| = \left| \int_0^\infty \sin 2(\varphi + \vartheta(\tau)) e^{-2\tau} d\tau \right|,$$

而シテ φ ノ 値 トシテ (15) = ヨリ 得ル

$$2\varphi_1 = \pi - 2 \arg a_2, \quad 2\varphi_2 = 3\pi - 2 \arg a_2$$

ヲ 代 入 シテ

$$\begin{aligned} &= \left| \int_0^\infty \sin 2(\arg a_2 - \vartheta(\tau)) e^{-2\tau} d\tau \right| \\ &= \frac{1}{2} \eta \end{aligned}$$

ト オケルニ $0 \leq \eta < 1$. $a_2 = -2 \int_0^\infty \chi(\tau) e^{-\tau} d\tau = \chi(\tau) e^{-\tau} \geq 0$
 = 對シテ $\sin 2(\arg a_2 - \vartheta(\tau)) = 1$ デアルト云フ特種ナル
 $\vartheta(\tau)$ = 對シテハ Kössler ノ 結果 ト一致スルケレドモ, コ
 ノ トキハ 實ハ (12) ノ 式 ノ 成立スル 場合 = ハ 起ラナイノ デアル。
コト = Kössler ノ 缺陷ガアル。

故ニ

$$\frac{\partial K}{\partial r} \leq \frac{6}{(1-r^2)^2} \cdot \eta \quad (f = f + \text{ル トキ} = \text{等号成立ス})$$

積トシテ $K(0, \varphi) \leq 2|a_2|$ ナルコトヨリ

$$(17) \quad K(r, \varphi) \leq 2|a_2| + \left(\frac{3r}{1-r^2} + \frac{3}{2} \log \frac{1+r}{1-r} \right) \eta.$$

而シテ $K(r, \varphi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \log |f'| = \frac{\partial}{\partial r} \arg f'(z)$ デアル

カラ, 再ビ (17) ヲ 積ルシテ

$$(18) \quad \arg f'(z) \leq 2|a_2| r + \frac{3}{2} r \log \frac{1+r}{1-r} \cdot \eta. \quad (\arg f'(0) = 1)$$

$$\frac{1}{2} \eta = \left| \int_0^{\infty} \sin 2(\arg a_2 - \vartheta(\tau)) e^{-2\tau} d\tau \right| = \text{於テ}$$

$$a_2 = -2 \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{-\tau} d\tau = -2 \int_0^{\infty} \cos \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau - i 2 \int_0^{\infty} \sin \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau$$

ヲ用テレバ

$$\arg a_2 = \arctan \frac{\int_0^{\infty} \sin \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau}{\int_0^{\infty} \cos \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau}$$

デアルカラ

$$(19) \quad \eta = \left| 2 \int_0^{\infty} \sin 2 \left\{ \arctan \frac{\int_0^{\infty} \sin \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau}{\int_0^{\infty} \cos \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau} - \vartheta(\tau) \right\} e^{-2\tau} d\tau \right|$$

而シテ定理 1 ハ次ノ様ニ書ケル。

$$\text{定理 2. } \left| \arg f'(z) \right|_{|z| \leq r} \leq 4 \left| \int_0^{\infty} e^{i\vartheta(\tau)} e^{-\tau} d\tau \right| r + \frac{3}{2} r \log \frac{M}{r} \cdot \eta.$$

η ハ (19) デ表ヘラル。

或ハ又 Valiron-Landau, 定理¹⁾ヲ用ヒテ定理, 結果ヲ絶対常数, η ヲ用ヒテ ($f =$ 依存スル a_2, η ヲ除ク) 表現スルコトモ可能デアル。

何レニシテモ最後, Ausdruck ハナルベク簡單ニスル

$$1) \quad \left| \int_0^{\infty} \chi^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau \right| \leq M \quad (0 \leq M \leq \frac{1}{2}) + \nu \text{トキハ } \left| \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{-\tau} d\tau \right| \leq \nu \left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2} \right),$$

但シ ν ヲ $(\nu + \frac{1}{2}) e^{-2\nu} = \frac{1}{4} + \frac{M}{2}$ + ル方程式ノ根トスレバ

$$\nu \left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2} \right) = (\nu + 1) e^{-\nu}$$

トシテ、Kessler、結果ハソ、Ausdruck = 於テ最良ノ
モノヲアルラシイ。