310. 距離付ケラレタ環ニ於ケル方程式 $A=e^X$

南雲道夫（阪大）

$\boxed{1}$ 距離付ケラレタ環トハ，實數又ハ複素數ヲ Operator（係數トシテ掛ケルコト）トシテ有スル環（Element ノ和及ビ積ガ定義サレ，和ニツイテハ abel 群，積ニツイテハ組合セノ法則及ビ分配ノ法則ガ成立スルモノ）$\mathfrak{R}$ デ，ソノ上 $\mathfrak{R}$ ノ各要素ニハ次ノ性質ヲ有スル絶對値ガ定義サレテキルモノヲ云フ。

$$A\neq 0 \text{ ノ時 } |A|>0.\quad |A+B|\leqq|A|+|B|.\quad |aA|=|a|\,|A|.$$
$$|AB|\leqq|A|\cdot|B|.$$

尚 $\mathfrak{R}$ ハ距離空間（$|A-B|$ ヲ A, B ノ距離トス）トシテ完全（Cauchy ノ收斂條件ガ成立スルコト）デアルト假定スル。

一般ニ完全ナ線狀距離空間ニ於ケル有界ナ一次変換ノ全体（非可逆的ノモノモ含ム）ハ上ノ意味ニ於ケル距離付ケラレタ環デアル。

次ニ距離付ケラレタ環 $\mathfrak{R}$ ハ特ニ單位 E ヲ含ムモノトシ

$$Exp\,(A)=e^A=E+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

ニヨッテ e^A ヲ定義スル．（$\mathfrak{R}$ ニ於ケル絶對値ノ性質及ビ $\mathfrak{R}$

ガ完全ナルコトニヨリ意味確定）特ニ

$$AB=BA \text{ ナラバ } \quad e^A e^B = e^{A+B}$$

デアルガ，一般ニハサウハ行カナイ。

又 $$lg\, A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (E-A)^n$$

ニヨッテ $lg\, A$ ヲ定義スレバ，之ハ $|A-E|<1$ ナルトキ意味ヲ持ツ。

$|A-E|<1$ ナルトキハ

$$Exp.(lg\, A) = A.$$

又 $|A|<\log 2$ ナラバ

$$lg(Exp.(A)) = A.$$

$A=e^B$ ナラバ A ハ *infinitesimal transformation* カラ生ズル可換群 e^{tB} ニ属スル。（t ハ実数）

$\boxed{2}$ 扨テ以上ノ環 $\mathfrak{R}$ ニ於テ A ガ與ヘラレタル要素トシ X ヲ未知ノ要素トスルトキ方程式

$$A = e^X$$

ガ解ケル條件ヲ研究スルノガ目的デアルガ未ダ満足ノ行ク所マデハ出來テヰナイ（一ツノ必充條件ハ得ラレテヰルガ，應用上之デハ少シ物足リナイ）

***Lemma* 1.** $|A-E|<1$ ナラバ $A=e^X$ ハ常ニ解ケル。

証明ハ $X = lg\, A$ トスレバ明カ。

定理 1. $A=e^X$ ガ $\mathfrak{R}$ ニ於テ解ケルタメニハ，A ヲ含

ミ $\mathfrak{R}$ 内デ連結（Zusammenhängend）ナ Abel 群（$\mathfrak{R}$ニ於ケル積ヲ結合トスル可換群デ単位ハEト一致スルモノ）$\mathfrak{A}$ ガ存在スルコトガ必要且ツ充分デアル。

（証明）　必要ナコトハ，e^{tX}（t実変数）トスレバ，之ハ連結ナ可換群デアリ，$t=1$ トスレバAトナル，従ッテ明ラカデアル。

次ニ充分ナ事ヲ証明スル。

先ヅ $|A-E|<1$ ナルトキハ Lemma ニヨッテ常ニ成立スル。

シカモ $X=lgA$ ハ $\mathfrak{A}$ カラ生ズル閉ヂタ環 $\mathfrak{L}$（$\mathfrak{A}$ ノ Element ノ和ヤ積及ビソノ集積点ヲ要素トスル環）ノ要素デアル（$A\in\mathfrak{A}$ ナルガ故ニ）。

所デ $\mathfrak{A}$ カラ生ズル閉ヂタ環 $\mathfrak{L}$ ノ内ニ $e^{X}=A$ ナル X ガ存在セヌト仮定スルト矛盾ヲ生ズル。何トナレバ $\mathfrak{A}$ ノ内デ e^{X}（$X\in\mathfrak{L}$）ナルヤウナ要素ノ全体ヲ $\mathfrak{A}_1$，シカラザルモノ全体ヲ $\mathfrak{A}_2$ トスレバ，$\mathfrak{A}$ ガ連結ダカラ，$\mathfrak{A}$ 内ニハ $\mathfrak{A}_1$ 及ビ $\mathfrak{A}_2$ ノ両方ノ集積点デアル様ナCガ存在スル。今 $C\in\mathfrak{A}_1$ トシ，$\lim A_n=C$，$A_n\in\mathfrak{A}_2$ トスレバ $C^{-1}A_n$ ハ n ガ充分大ナルトキ $|C^{-1}A_n-E|<1$ トナル。故ニ

$$C^{-1}A_n=e^{B_n}\quad(B_n\in\mathfrak{L}).$$

従ッテ $A_n=e^{D}e^{B_n}=e^{D+B_n}$（$e^{D}=C$, $D\in\mathfrak{L}$ トス）。

之レハ $A_n\in\mathfrak{A}_2$ ニ矛盾スル。

今度ハ $C \in \mathfrak{A}_2$ トシ, $\lim A_n = C$, $A_n \in \mathfrak{A}_1$ トスレバ n ガ充分大ナルトキ $|C^{-1}A_n - E| < 1$ ニヨリ, $C^{-1}A_n = e^{B_n}$.

從ッテ $C = e^{-B_n} e^{-D_n} = e^{-B_n - D_n}$ ($B_n \in \mathfrak{L}$, $A_n = e^{D_n}$, $D_n \in \mathfrak{L}$). 之レハ $C \in \mathfrak{A}_2$ ト矛盾スル。

結句 $\mathfrak{A}$ ノスベテノ *Element* ハ e^X ($X \in \mathfrak{L}$) ナル形ニ表ハサレネバナラヌ。(証明了)

$\boxed{3}$ 前ノ定理ノ條件ハ抽象的デアルガ、次ニ之レヲ應用シテ特別ナ環ニ於テ $A = e^X$ ガ解ケル條件ヲ求メテ見ヨウ。

定理 2. $\mathfrak{R}$ ハ複素数ヲ *Operator* (係数) トシテ有スル環トシ, $E + \lambda A$ (λ 複素数) ハ高々可附番個ノ λ ヲ除イテ [A 一定ノ時ニ] 常ニ逆 $(E + \lambda A)^{-1}$ ヲ有スルモノトスル。シカラバ $\mathfrak{R}$ 内デ

$$A = e^X \quad (X \in \mathfrak{R})$$

ナルタメニハ A ガ逆 A^{-1} ヲ有スルコトガ必要且ツ充分デアル。

(註) $\mathfrak{R}$ ガ有限次ノ *Matrix* ナルトキハ上ノ條件ハ明カニ成立スル。$Det\,(E + \lambda A) = 0$ ハ有限個ノ根 λ ヲ有スルカラ。

又 $\mathfrak{R}$ ガ函数 $f(x)$ ニ對スル *Fredholm* ノ運算 (線狀変換)

$$Af = af(x) + \int K(x, y) f(y) dy$$

ヨリナル場合 (a ハ常数) ニモ, *Fredholm* ノ積分方程式論ニヨリ上ノ條件ハ満足サレテヰル。

上ノ定理2ヲ証明スルタメニ次ノ Lemma ヲ証明スル。

<u>Lemma 2.</u> $A \in \mathfrak{R}$ ニヨッテ生ズル閉ヂタ環（AトEカラ成ル多項式及ビソノ集積点カラ成ル環）ノ内デ<u>逆ヲ有スルモノ</u>（逆ハ$\mathfrak{R}$ニ属ス）ノ全体ヲ考ヘ、更ニソノ内デ<u>Eト連結ナ</u>要素ノ全体ヲ $\mathfrak{A}$ トスレバ, $\mathfrak{A}$ ハ連結ナ Abel 群（可換群）デアル。

（Lemma ノ証明） $\mathfrak{A}$ ガ連結ナ集合ナルコトハ明カデアル、 $\mathfrak{A}$ ノ内デ特ニ $|X-E|<1$ ナル X ノ逆ハ

$$X^{-1}=E+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(X-E)^n$$

ニヨリ與ヘラレル。

カヽル X^{-1} ハ X ト共ニ連続的ニ変化スルカラ $\mathfrak{A}$ ニ属スル、之レカラ定理1ニ於ケルト類似ノ証明法（帰謬法）ニヨリ X^{-1} ハスベテ $\mathfrak{A}$ ニ属スルコトガ証明サレル。 $\mathfrak{A}$ ニ属スル二ツノ要素ノ積ガ $\mathfrak{A}$ ニ属スルコトハ積ノ連続性（Eカラ出発シテ）ニヨリ容易ニ分ル。又 $\mathfrak{A}$ ハスベテAカラ生ジタモノ故交換可能デアル。從ッテ $\mathfrak{A}$ ハ Abel 群ヲ作ル。

（定理2ノ証明） 定理ノ條件ガ必要ナコトハ $A^{-1}=e^{-X}$ ニヨリ明ラカ。 次ニ充分ナコトハ Lemma 2 ニ於ケル群 $\mathfrak{A}$ ヲ考ヘレバ, $\mathfrak{A}$ ハAヲ含ム。［$(1-\lambda)E+\lambda A$ ヲ考ヘレバAハ逆ヲ有スルカラ、假定ニヨリλガ可附番個ノ所ヲ避ケテ変化スレバ, EトAトハ $\mathfrak{A}$ 内デ連結シテヰルコトガワカル。］ 從ッテ定理1ニヨリ本定理ガ証明サレタ。

(註)　Lemma 2 ハ定理 2 ノ証明ニハ必ズシモ必要デハナイ。　Lemma 2 ニヨレバ $A = e^X$ ナル X ガ<u>A カラ生ズル閉ヂタ環内ニ存在</u>スルコトガ言ヘルノデアル。

$\boxed{4}$ 尚ホ定理 1 ヲモット緩ナルコトガ出來ナイデアラウカ？　例ヘバ A ガ $\mathfrak{R}$ 内デノ連続ナ群（Abel 群デナクトモ）ニ属スルコトカラ $A = e^X$ ト書ケナイデアラウカ？

又定理 1 ニヨリ一般ノ連続ナ Abel 群ノ構造ヲ決定スルコトガ出來ナイデアラウカ？

—— 以上 ——