302. 吉田君ノ論文216，泉・北川両君ノ論文279ニ就イテ

三　村　征　雄（阪大）

（I）本紙60号デ吉田君ハ

$$U_a f(x) = f(x+a)$$

ナル Stone ノ変換群ノすぺくとるヲ計算サレタが，コレハ次ノ如クヨリ形式的ナ方法デ求メラレルコトヲ注意スル。目的ハ

$$(U_a f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\lambda} d(E(\lambda)f, f)$$

ヲ満足スル射影作用素 $E(\lambda)$ ヲ求メルコトデアル、今ふーりえ変換ヲ T ニテ表ハシ

$$T^{-1} f(x) = \gamma(x)$$

トスレバ，ぱるせゞあるノ定理デ（即チ T がうにてーるナルコトヨリ）

$$(U_a f, f) = (T^{-1} U_a f, T^{-1} f)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\lambda} \gamma(\lambda) \overline{\gamma(\lambda)} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\lambda} d\varphi(\lambda)$$

ココニ

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \gamma(\mu) \overline{\gamma(\mu)} d\mu$$

デアルが，

S_λ ナル作用素ヲ

$$S_\lambda f(\mu) = f(\mu) \qquad \mu \leq \lambda$$
$$= 0 \qquad \mu > 0$$

ト定義スレバ

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\lambda \gamma(\mu)\, \overline{\gamma(\mu)}\, d\mu$$
$$= (S_\lambda T^{-1} f, T^{-1} f) = (T S_\lambda T^{-1} f, f)$$

ヲ得、S_λ ハ一ツノ Spektralschar デアルカラ，$T S_\lambda T^{-1}$ モ亦然リ、即チ

$$E(\lambda) = T S_\lambda T^{-1}$$

デアル。

(II). 上ノ結果ヨリ本紙67号デ泉，北川両君ノ得ラレタル定理ヲ証明シテ見ヤウ、即チ吾々ノ記法ニヨレバ

定理 Λ ヲ L^2 ノ有界ナ一次変換ニシテ "Linear translatable" 即チ

$$U_a \Lambda = \Lambda U_a$$

ナルモノトスレバ $l(x)$ ナル有界ナ函数が存在シ

$$T^{-1} \Lambda T f(x) = l(x) f(x)$$

デアル。(逆ハ自明デアル)

証明 先ヅスベテノ a ニ對シ

$$\Lambda U_a = U_a \Lambda \text{ ナラバ } \Lambda E(\lambda) = E(\lambda) \Lambda$$

デアル。如何ニモスベテノ a ニ對シ

$$(U_a \Lambda f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\lambda} d(E(\lambda) \Lambda f, g)$$

デアル一方

$$(\Lambda U_a f, g) = (U_a f, \Lambda^* g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\lambda} d(E(\lambda)f, \Lambda^* g)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\lambda} d(\Lambda E(\lambda)f, g)$$

デアルカラ，

$$(\Lambda E(\lambda)f, g) = (E(\lambda)\Lambda f, g)$$

即チ $\quad \Lambda E(\lambda) = E(\lambda)\Lambda$

ヲ得ル。

故ニ $\quad \Lambda T S_\lambda T^{-1} = T S_\lambda T^{-1} \Lambda$

即チ

$$T^{-1}\Lambda T S_\lambda = S_\lambda T^{-1}\Lambda T$$

今 $\quad T^{-1}\Lambda T = B$

トオケバ

$$B S_\lambda = S_\lambda B \qquad \text{(1)}$$

デアル。

又 $\varphi_{ab}(x)$ ヲ

$$\varphi_{ab}(x) = 1 \qquad a < x \leqq b$$

$$= 0 \qquad x \leqq a, \text{ 又ハ } x > b$$

ナル函数（$\in L^2$）トスレバ，(1) ニヨッテ

$$B\varphi_{ab}(x) = 0 \qquad x > b, \text{ 又ハ } x \leqq a$$

従ッテスベテノ n ニ対シ

$$l(x) = B\varphi_{n,n+1}(x) \qquad n < x \leqq n+1$$

ナル函数（必ズシモ L^2 ニ属サヌ）ヲ定義スレバ同ジク (1) ヨ

リ

$$B\varphi_{ab}(x)=l(x)\varphi_{ab}(x)$$

ヲ得ル。

先ヅ $l(x)$ ハ有界デアル、何トナレバ假定ニヨリ

B ハ有界、即チ $\|Bf\|\leq G\|f\|$

ナル G ガ存在スル、故ニ

$$\int_a^b |l(x)|^2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}|l(x)\varphi_{ab}(x)|^2 dx$$

$$\leq G^2\|\varphi_{ab}\|^2=G^2(b-a)$$

即チ *Mass 0* ノ点ヲ除イテデハアルガ

$$|l(x)|\leq G$$

即チ $l(x)$ ハ有界デアル、然ルトキ φ_{ab} ノ一次結合ニヨッテ任意ノ $f(x)\in L^2$ ハ近似サレル故結局

$$Bf=T^{-1}\Lambda Tf=l(x)f(x)$$

ヲ得、定理ハ証明サレル。

(III) 上ノ定理ニ就キ次ノ事實ハ注意スベキデアル。

即チ S_λ ヲ *Spektralschar* トスルえるみっと作用素ハ

$$Hf(x)=xf(x)$$

ニヨッテ與ヘラレル。而シテ $BS_\lambda=S_\lambda B$ ハ $BH=HB$ ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件デアリ、上ノ定理ハ

「B ガ H ト交換可能ナルタメノ條件ハ

B ガ H ノ"函數"ナルコトデアル」

ト述ベラレル、然ルニ一般ニハ (*Neumann, Rieß*)

Bガアルえるみっと作用素Γノ函數ナルタメノ條件ハBガΓト交換可能ナルスベテノ作用素ト交換可能ナルコトデアル、即チ吾々ノHニツイテハ條件ガ簡單ニナッテ居ルノハ如何ナル事情ニヨルカトイヘバ、ソレハHガ *einfach* ナ *Spektrum* ヲ持ツカラナノデアル。 $\odot$ ガ任意ノ *einfach* ナ *Spektrum* ヲ持ツHニ就イテ成立スルコトハ *Stone* ノ書物ノ300頁定理8.1ニ就イテ見ラレタイ。

(IV) 最後ニ *Bochner* ノ定理 (*Math. Zeits.* 29. 泉, 北川論文 279) ガ泉, 北川ノ定理ト等値デアルコトハ

$$\frac{1}{i} f'(x) = Df$$

ナル作用素ト上ノHトハ

$$D = THT^{-1}$$

ナル関係ニアルコトヨリモ知ラレルコトヲ注意スル。(*Stone*, 441頁定理10.9)

$\boxed{\text{追加}}$ 其ノ後コノ方法デΛガ有界デナイ場合ニ出來タ様ニ考ヘラレルガ別ノ機會ニ讓ルコトトスル。

昭和十年度七月――十二月分會費

未拂込ノ方ハ至急下記(振替貯金)

ヘ御拂込ミ下サイ。

(會費未納ノ方多キ爲ニ最近財政困難

デスカラ是非至急御願ヒ致シマス。)

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數學教室 清水辰次郎

口座番號 大阪一七七四三番