301. 正田先生ノ定理ニ就テ

高橋 進 一（阪大）

Determinant 1 ナル matrix ハ commutator デアルトイフ正田先生ノ定理ノ極ク trivial ナ一ツノ application トシテ次ノ定理ヲ証明シマセウ。

A ナル matrix ノ spur ガ 0 ナルトキハ e^{xA} ナ

ル matrix ハ commutator デアル。但シ x ハ任意ノ實數.

定義ニ依ッテ

$$e^{xA} = \lim_{m} \left(E + \frac{xA}{m} \right)^m$$

$$\therefore \quad Det.\, e^{xA} = \lim_{m} Det. \left(E + \frac{xA}{m} \right)^m$$

然ルニ

$$Det. \left(E + \frac{xA}{m} \right) = 1 + \frac{x}{m} \sum_{K=1}^{n} a_{KK} + \frac{x^2}{m^2} \sum \Delta_2$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{x^n}{m^n} Det.\, A$$

此処ニ $\sum \Delta_2$ ハ二次ノ hauptminor ノ和，以下其レニ準ズ。

依ッテ

$$Det. \left(E + \frac{xA}{m} \right)^m = \left(1 + \frac{x \sum_{K} a_{KK} + \frac{1}{m}(x^2 \sum \Delta_2 + \cdots\cdots)}{m} \right)^m,$$

$$\therefore \quad \lim_{m=\infty} Det. \left(E + \frac{xA}{m} \right)^m = exp.\left(x \sum_{K} a_{KK} \right)$$

即チ

$$Det.\, e^{xA} = exp.\,(x\, Sp.\, A)$$

此ノ最後ノ式カラ若シ $Sp.\, A = 0$ ナラ $Det.\, e^{xA} = 1$ トナルカラ正田先生ノ定理ニ依ッテ e^{xA} ハ commutator トナリマス。

又 Volterra-Schlesinger ノ所謂 Produkt integral

$$\widehat{\int_p^x}(E+A\,dx)$$

ニ就テハ

$$\mathrm{Det.}\widehat{\int_p^x}(E+A\,dx)=\exp.\left(\int_p^x Sp.\,A\,dx\right)$$

ナル関係ガ成立スルコトヲ Schlesinger ハ Math. Zeits. 33(1931) デ証明シテ居マスカラ $Sp.\,A=0$ ナラ Matrix A ノ任意ノ interval ニ於ケル Produktintegral モ亦 commutator デス。

但シ此ノ場合ノ Matrix A ハ其ノ element ガ函數デスカラ $Sp.\,A$ ナル函數モ與ヘラレタ interval デ identically zero ナル假定ヲ必要トシマス。