290. 抽象空間ニ於ケル重心ニ關シテ分解可能ナ偏差

南雲道夫（阪大）

ゆーくりっど空間ニ於ケル重心ニ就イテハ次ノ著シイ性質ガアル。

S ヲ n 個ノ点 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ ノ重心トシ、Q ヲ任意ノ点トスレバ

$$\sum_{\nu=1}^{n} \overline{P_\nu Q}^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{P_\nu S}^2 + n\,\overline{SQ}^2.$$

但シ $\overline{PQ}$ ハ PQ 間ノ距離デアル。

$\boxed{\text{假　定}}$

扨テ以上ノ考ヘヲ一般ノ位相空間ニ拡張シ，n 個ノ点 $P_1, \cdots\cdots, P_n$ ノ重心 S ハ任意ノ点 Q ニ對シ

$$(0) \quad \sum_{\nu=1}^{n} f(P_\nu, Q) = \sum_{\nu=1}^{n} f(P_\nu, S) + n f(S, Q)$$

ナル函数方程式ヲ満足スルモノトスル。 但シ $f(P, Q)$ ハ實数値ヲ取ル P, Q ノ函数デ之レヲ P, Q ノ偏差ト名付ケル。

(1) $P \neq Q$ ノ時，$f(P, Q) > 0$，$f(P, P) = 0$.

(2) $f(P, Q) = f(Q, P)$

(3) $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ ナルコトト $\lim_{n\to\infty} f(P_n, P) = 0$ トハ同等。

(4) 且ツ $\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} f(P_m, P_n)=0$ ナラバ $\lim_{n\to\infty} P_n$ が存在スル。

以上ノ假定ハ空間が *topologischer Raum* デアルが，距離が與ヘラレテナイノデ，$f(P, Q)$ ヲ以テ距離ノ代用ノ役目ヲサセルタメノ條件ニ他ナラナイ。(4) ハ空間が *vollständig* ナルコト（*Cauchy* ノ收斂條件が成立スルコト）ヲ示スモノデアル。

尚ホ二点ノ重心ニツイテ次ノ假定ヲ加ヘル。

(5) P, Q ヲ任意ノ二点トスル時，Q が P, P' ノ重心デアル様ナ点 P' が常ニ只一ツ存在スル.

假定 (5) ハ強イケレドモ証明ノ遂行上省クコトが出來ナイ。

以上ノ假定ノ下ニ $f(P, Q)$ 及ビ重心ノ性質、從ッテ又空間ノ性質ヲ定ムルノが目的デアル。

$\boxed{\text{結　論}}$

(a) $\sqrt{f(P, Q)}$ ナル量が距離ノ性質ヲ有スル事

(b) 空間ハ *Vektor* ノ性質ヲ有スル（線形距離空間ナル）事

(c) 重心ハ $\mathfrak{y}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\mathfrak{x}_\nu$ デ表ハサレル事

(d) 空間ノ距離 $\sqrt{f(P, Q)}$ ハゆーくりっど的なる事

$\Big[\ |\mathfrak{x}|^2=(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}),\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ハ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ノ *inneres*

Produkt 即チ ξ, η ニツキ linear ナル事)

$\boxed{\text{証明ノスヂミチ}}$

証明ニハ，本質的ニハ $n=2$ ノ場合ノミデ充分デアル（$n=4$ ハ $n=2$ ノ場合ヲ組合セテ得ラレル）

先ヅ $\sqrt{f(P, Q)} = \rho(P, Q)$ トスレバ (0) 及ビ (2) カラ

$$\rho(P_1, S) = \rho(P_2, S) = \frac{1}{2}\rho(P_1, P_2).$$

又一般ニ

$$\rho(P_1, P_2) + \rho(P_2, P_3) \geqq \rho(P_1, P_3).$$

従ッテ空間ハ $\rho(P, Q)$ ヲ距離トスル<u>距離空間デ重心ハ中点ノ性質ヲ持ツ</u>。

次ニ又 (0) カラ<u>重心ハ結合ノ法則</u>（紙上談話會66号，268）ヲ満足スルコトガワカル、特ニ P_1, P_2 ノ重心ヲ $[P_1, P_2]$ トスルトキハ，結合ノ法則

$$\big[[P_1, P_2], [P_1', P_2']\big] = \big[[P_1, P_1'], [P_2, P_2']\big]$$

ヲ満足スル。　又 $[P_1, P_2] = [P_2, P_1]$，$[P, P] = P$ ナルコトハ言フマデモナイ。之レト (5) ノ假定カラ

$$[A, P_3] = [P_1, P_2] \qquad (A\text{ハ定点})$$

ナル関係ガアルトキ

$$\overrightarrow{AP_3} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}$$

ト定ムレバ
$$\begin{cases} \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} \\ \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AQ} \end{cases}$$

ガ一義的ニ解ケルコトガ証明サレ、更ニ組合セノ法則

$$(\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_2})+\overrightarrow{AP_3}=\overrightarrow{AP_1}+(\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_3})$$

ガ証明出来ル、シカシテ重心 $Q=[P_1, P_2]$ ハ

$$2\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_2} \qquad [\text{之ヲ } \overrightarrow{AQ}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_2})]\text{トス}$$

ニヨツテ規定サレル。

次ニ又 (0) ノ仮定ト距離 $\rho(P, Q)=\sqrt{f(P, Q)}$ ニヨリ

$\overrightarrow{P_1P_1'}=\overrightarrow{P_2P_2'}$ $[\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$ ト定ム$]$ ナルトキ

$$\rho(P_1, P_1')=\rho(P_2, P_2')$$

又、重心ガ中点ナルコトニヨリ $\overrightarrow{AP_n}=n\overrightarrow{AP}$ トスレバ

$$\rho(A, P_n)=n\rho(A, P)$$

ヲ得ル、之レ等ノコトト (4) (*Vollständigkeit*) カラ空間ハ<u>線状空間</u> (*Banach* ノ空間) トナルコトガ証明サレル。

次ニ $\overrightarrow{AP}=\mathfrak{x}$ デ示セバ

$$f(P_1, P_2)=\{\rho(P_1, P_2)\}^2=\varphi(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1)$$

トシテ表ハサレル、故ニ函数方程式 (0) ハ $S=A$ トスルトキ特ニ $n=2$ ノ場合ニ於テ

$$\varphi(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})+\varphi(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})=2\{\varphi(\mathfrak{x})+\varphi(\mathfrak{y})\}$$

トナル。

此ノ函数方程式カラ (*J. v. Neumann* ガ *Hilbert* 空間ノ *Metrik* ヲ *charakterisieren* スルタメニ用ヒタ)

$$\varphi(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}).$$

但シ $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ハ $\mathfrak{x}$ ニツイテモ $\mathfrak{y}$ ニツイテモ linear デアル。

[上ノ方程式ニ於テ $\mathfrak{x}$ ノ代リニ $\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2$ トオイタモノカラ $\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2$ トオイタモノヲ減ズルコトニヨリ, $\varphi(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2)-\varphi(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2)=\psi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ トオケバ

$$\psi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \psi(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1),$$

$$\psi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2+\mathfrak{y}) + \psi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2-\mathfrak{y}) = 2\psi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2),$$

又 $\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 4\varphi(\mathfrak{x})$ ナルニヨリ上ノ結論ヲ生ズ。]

——以上——