289. 蘇歩青氏ヨリ平川淳康氏へ

平川淳康學兄

十月五日　　　　　　　　　　　　蘇歩青

拝啓、最近の日本數學輯報第十二巻第二号に発表せられた貴著 "The affine breadth and its relation to the relative breadth" を面白く拝見致しました。擬似二重法線の卵形線を定める問題は今から約十年前に荻原伸次氏が盛んに研究を試みられたのですが未だ解決されてゐないと思ひます、貴著の定理4 (p. 45 にあるのですが定理の中に parallel を書き落したやうに思はれます) が丁度その特殊の場合に對する解答となるわけです。

私は昨年度の微分幾何學の講義の中で同定理を普通の方法で証明しました、勿論 affine breadth の考へから導いたものではありませんが其証明はさほど複雑でないようですから御参考にでも申上げませう。

卵形線ノ点ノ polar tangential coordinates (p, φ) ヲ用ヒレバ

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & x(\varphi)=p(\varphi)\sin\varphi+p'(\varphi)\cos\varphi,\\
& y(\varphi)=-p(\varphi)\cos\varphi+p'(\varphi)\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

今 S ヲ擬似曲線長トシ、ρ ヲ曲率半径トスルトキ,

$$
\frac{dS}{d\varphi}=\rho^{\frac{2}{3}}=(p+p'')^{\frac{2}{3}},
$$

從ッテ

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dS}=\rho^{\frac{1}{3}}\cos\varphi, \qquad \frac{d^2x}{dS^2}=\frac{1}{3}\rho^{-\frac{4}{3}}\left[\frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi-3\rho\sin\varphi\right],\\
&\frac{dy}{dS}=\rho^{\frac{1}{3}}\sin\varphi, \qquad \frac{d^2y}{dS^2}=\frac{1}{3}\rho^{-\frac{4}{3}}\left[\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi+3\rho\cos\varphi\right].
\end{aligned}
$$

トナル。

点 $(x(\varphi), y(\varphi))$ ノ擬似法線ガ点 $(x(\varphi+\pi), y(\varphi+\pi))$ ヲ通ルタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ明カニ

$$(3)\quad \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} = \{x(\varphi)-x(\varphi+\pi)\} : \{y(\varphi)-y(\varphi+\pi)\}$$

ナル故

$$D(\varphi) = p(\varphi) + p(\varphi+\pi)$$

トオキ，且ツ (1) ヲ利用スルコトニ依ッテ (3) ハ

$$(4)\quad D(\varphi)\frac{d\rho}{d\varphi} + 3\rho\frac{dD(\varphi)}{d\varphi} = 0$$

トナル、コレヲ積分シテ

$$(4')\quad \rho(\varphi)[D(\varphi)]^3 = const.$$

ヲ得ル、然ルニ

$$D(\varphi) = D(\varphi+\pi)$$

故ニ

$$(5)\quad \rho(\varphi) = \rho(\varphi+\pi)$$

一方デハ

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{1}{2}(x(\varphi)+x(\varphi+\pi)\right\} = \frac{1}{2}\{\rho(\varphi)-\rho(\varphi+\pi)\}\cos\varphi = 0,$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{1}{2}(y(\varphi)+y(\varphi+\pi)\right\} = \frac{1}{2}\{\rho(\varphi)-\rho(\varphi+\pi)\}\sin\varphi = 0.$$

コレハ二平行切線ノ切点ノ結ビ付ケガ定点ヲ中点トスルコトヲ示ス。

結局考フル所ノ卵形線ノ擬似法線ガ定点ヲ通レコトニナ

ルカラ楕円デナケレバナラナイ。(※)

以上ハ申上グベキ事柄ノ全体デスガ蛇足ト存ジナガラ御覧ノ程ヲ願ヒマス。

敬具

(※) 此定理ヲ用ヒナクテモ,直接=(4)カラ $x=\rho^{-\frac{1}{3}}$ トオキ,

$$\text{affinkrümmung} = x^3(x+x'') = \text{const.}$$

ヲ証明スルコトが出來ル。

—— × ——

(以上書信原文ノマヽデス)

[註] 本定理ハ W. Süss 氏ノ次ノ論文中=アル特別ナモノデ彼ハ

Über affine Geometrie XL: Eiflächen konstanter Affinbreite; Math. ann., 96 (1927).

ニ於テ一般ノ場合ヲ取扱ッテ居マスが、ソノ間違デアルコトヲ荻原氏が物理学校雑誌デ指摘サレテ居マス。併シ此ノ書信中ノ定理ハソノ特別ナモノトシテ証明サレテ居マス。私ノ論文=於テハ之ヲ参照スベキ記号ヲ校正ノ際落シマシタ、勿論 parallel ヲ落シタコトモ私ノ不注意=ヨルモノデアリマス。

(平川)