288. Determinante 1 ノ Matrix ハ Kommutator

正田建次郎（阪大）

Komplexe Zahlen ヲ Element トスル Matrix ヲ取扱ヒマス。

Determinante ハ 0 デナイトスレバ $ABA^{-1}B^{-1}$ ノ Determinante ハ勿論 1 デスガ又逆モ成立シマス、即チ C ヲ Determinante 1 ノ Matrix トスレバ $C=QPQ^{-1}P^{-1}$ ナル Matrix Q, P ガ存在シマス。

証明。コノ性質ハ相似変換（ähnliche Transformation）デ不変デスカラ C ガ Jordan ノ Normalform デ表ハサレテ居ルモノトシマス。C ノ對角線ニ現ハレル数ヲ $a_1, a_2, \text{------}, a_n$ トシマス、コレ等ハ C ノ Eigenwert デス。次ニコノ n 個ノ数ヲ積ガ 1 ニナルヤウニ出來ルダケ細カク分ケマス、簡単ノタメニ $a_1, \text{------}, a_i$ ヲソノ 1 ツノ組トシ n 個ノ数 $\rho_1, \rho_2, \text{-------} \rho_n$ ヲ次ノヤウニ決定シマス。

$$a_1\rho_1 = a_2, \quad a_2\rho_2 = a_3, \text{-------} a_{i-1}\rho_{i-1} = \rho_i$$

$$a_{i+1}\rho_{i+1} = \rho_{i+2}, \text{---------}$$

$$\text{------------------------}$$

スルト $a_1a_2\cdots\cdots a_i=1$ カラ $a_i\rho_i=\rho_i$ ニナリ

$a_k\cdots\cdots a_{k+j}\neq 0$ カラ ρ_j ガスベテ異ナルコトガ分リマス。ソコデ $\rho_1, \rho_{i+1}, \cdots\cdots$ ハ任意ニトレルノデスシ $\rho_1, \cdots\cdots, \rho_i$ ハ全部異ナルノデスカラ $\rho_1, \rho_{i+1}, \cdots\cdots$ ヲウマクトレバ $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots, \rho_n$ ガスベテ異ナルヤウニスルコトガ出來マス。又 $a_1\rho_1, a_2\rho_2, \cdots\cdots, a_n\rho_n$ ハ全体トシテハ $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots, \rho_n$ ト一致スル。$\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots, \rho_n$ ヲ Element トスル Diagonalmatrix ヲ P トスレバ CP ノ Eigenwert ハ $a_i\rho_i$ 即チ P ノ Eigenwert ρ_j ト一致シ $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots, \rho_n$ ガスベテ異ナル故 CP ト P トハ相似デアル、從ツテ

$$CP=QPQ^{-1}, \quad C=QPQ^{-1}P^{-1}$$

ナル Matrix Q ガ存在スル、コレデ証明ガ出來タワケデス、コンナコトハ恐ラク既ニ知ラレテ居ルコトカト思ツタノデスガ、私ハ今マデ知ラナカツタノデ証明シテ見タ次第デス。

コノ事柄ヲ使フト以前學士院記事ニ發表サレタ中野君ノ論文ノ代數的意味ガハッキリシマス。

吾々ノ Matrix 全部ハ勿論群ヲ作リマス、ソレヲ $\mathfrak{G}$ トシマス、$\mathfrak{G}$ ノ lineare Darstellung ハ常ニ $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ ノ Darstellung デス. ココニ $\mathfrak{C}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ Kommutatorgruppe.

上ノ事柄カラ $\mathfrak{C}$ ハ Determinante ガ 1 ノ Matrix

全部ノ群ト一致シマス. 故ニ $\mathfrak{G}/\Gamma$ ハ0ヲ除イタ Komplexe Zahlen ノナス群ト isomorph デソノ Isomorphismus ハ數αトソレヲ Determinante トスル Matrix ノ Klasse トヲ對應サセレバ得ラレマス。

從ッテ $\mathfrak{G}$ ノ lineare Darstellungen ノ問題ハ0デナイ複素数ノナス群ノ Darstellungen ノ問題, 言ヒカヘレバ

$$f(x)\,f(y) = f(xy)$$

ナル關係式ヲ滿足スル函数 $f(x)$ ヲ決定スル問題ニナリ行列ノ問題ヲ離レルワケデス。

Determinante ガ1ナル Matrix ガ Kommutatorgruppe ヲ作ルコトハ知ラレテ居リマス。ソレハ任意ノ Körper ノ元ヲ分子トスル Matrix ニツイテモ成立シマス。$n=2$ デ Körper ガ2ツノ Element カラナルトキハ例外デス。(van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen 6頁)