287. 代數方程式ノ根ノ絶對値ニ関スル高橋進一氏ノ問題ニ就テ

野村武衛（東京高師）

紙上談話會第60号高橋氏論文214，5頁ノ方程式(6)ノ根ノ絶對値ノ上限ヲPトスルト角谷氏（第65号論文254）ニヨツテ

$$1.1135<P<1.1509$$

ナルコトが知レマシタ。

高師理科第一部四年生森田紀一君ハPハ$x^{12}+x^2=1$ノ正根ρノ逆數ヲ超エナイコトヲ証明シマシタ。$\rho=0.8820$デスカラ$\frac{1}{\rho}=1.1338$トナリ角谷氏ノ研究ト合セテ

$$1.1135<P<1.1338$$

トナリマス。

次ニ森田君ノ証明ヲ紹介サセテイタダキマス。森田君ノ方程式ハ係数ノ順序が反對ニナツテヰルカラ根ノ絶對値がρヨリ大ナルコトヲ証明スルコトニナリマス。

$$\varphi(x)=(a_0+ib_0)+(a_1+ib_1)x+\cdots\cdots+(a_n+ib_n)x^n=0$$

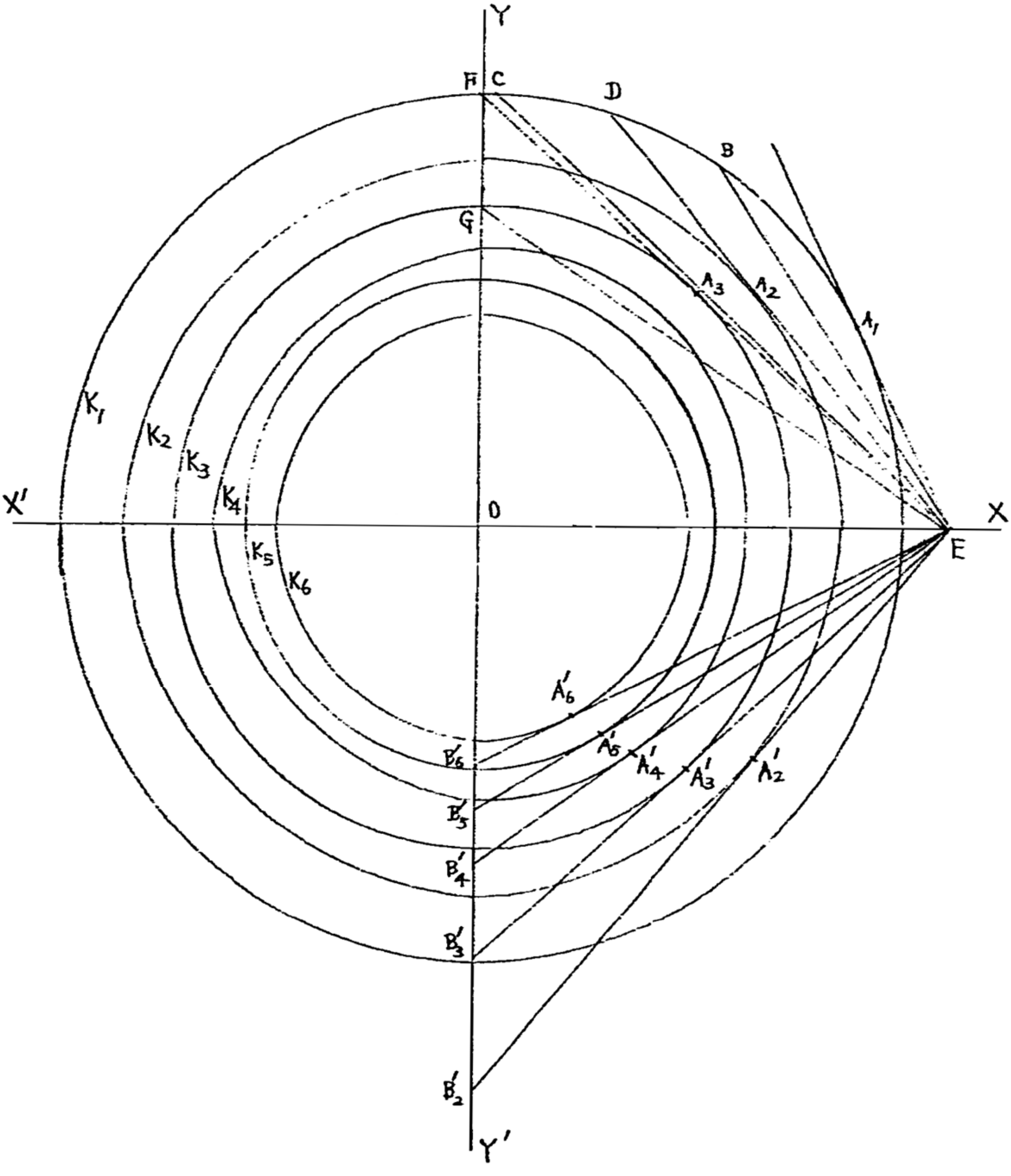
$$a_0\geqq a_1\geqq\cdots\cdots\geqq a_n\geqq 0,\quad b_0\geqq b_1\geqq\cdots\cdots\geqq b_n\geqq 0$$

ノ根ノ絶對値ハ$\rho^{12}+\rho^2=1$ノ正根ρヨリ大ナルコトヲ証明スル。

$$(x-1)\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\left\{(a_{k-1}-a_k)+i(b_{k-1}-b_k)\right\}(x^k-1)\qquad 但\ a_{n+1}=b_{n+1}=0$$

假定ニヨレバ $a_{k-1}-a_k \geqq 0$, $b_{k-1}-b_k \geqq 0$ ナル故 $|x| \leqq \rho$ ナルトキハ $k=1,2,\cdots\cdots,n+1$ ニ對シテ常ニ $\mathrm{amp}(x^k-1)$ ガ或ル定マツタ直角内ニアル換言スレバ總テノ x^k ガ E(1ニ相等スル點) ヲ頂點トスル定マツタ直角内ニアルコトヲ示セバヨイ。

ソレヲ示ス爲ニ原點ヲ中心トシ半徑 $\rho, \rho^2, \rho^3, \cdots\cdots$ ナル円



ヲ描キ夫々ノ円ヲ $K_1, K_2, K_3, \cdots\cdots$ トスル。Eカラ X軸ノ上側デ之等ノ円ニ引イタ切線ノ切点ヲ夫々 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ トシ，X軸ノ下側デ引イタ切線ノ切点ヲ夫々 $A'_1, A'_2, A'_3, \cdots\cdots$ トスル。又ソレ等下側ノ切線ガ OY' 軸ヲ切ル点ヲ夫々 $B'_1, B'_2, B'_3, \cdots\cdots$ トスル。

コノトキ $OB'_6=\rho^5,\ OB'_5>\rho^4,\ OB'_4>\rho^3,\ OB'_3>\rho^2, \cdots\cdots\cdots$ ナルコトハ $\rho^2+\rho^{12}=1$ ナルコトカラ容易ニ証明セラレル。

$x=re^{i\theta},\ 0\leqq r\leqq\rho$ トシテ考ヘルベキデアルガ、次ノ証明デハ $r=\rho$ ノ場合ノミヲ考ヘル。ソレハ $r=\rho$ ノトキ次ノ証明ガ出来レバ $0\leqq r<\rho$ ノトキハ勿論出来ルカラデアル。

I) $0\leqq\theta<\frac{3}{10}\pi$ ナル場合

$$\sin A_1EO=\rho,\qquad \sin OEA'_6=\rho^6$$

$$\therefore\quad \sin^2 A_1EO+\sin^2 OEA'_6=\rho^2+\rho^{12}=1$$

$$\therefore\quad \angle A_1EB'_6=\frac{\pi}{2}$$

一方コノ場合ニハ $5\theta=\frac{3}{2}\pi$ ナル故 x^k ハ悉ク $\angle A_1EB'_6$ ナル直角内ニアル。

II) $\frac{3}{10}\leqq\theta<\frac{3}{8}\pi$ ナル場合

$\sin^{-1}\frac{4}{5}<\frac{3}{10}\pi$ ナル故 K_1 円周上ニ $\angle BOE=\sin^{-1}\frac{4}{5}$ ナル点 B（X軸ノ上側）ヲトル。

$$\sin^2 BEO=\frac{16\rho^2}{25+25\rho^2-30\rho}\qquad \sin OEB'_5=\rho^5$$

$\rho=0.8820$ ヲ代入シテ計算スルト

$$\sin^2 BEO+\sin^2 OEB_5'<1 \quad \text{故ニ} \ \angle BEB_5'<\frac{\pi}{2}$$

一方コノ場合ニハ $4\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ ナル故 x^k ハ悉ク $\angle BEB_5'$ ノ内ニアル。

III) $\frac{3}{8}\pi\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ ナル場合

EA_2 ト K_1 円トノ交点ヲ D トスルト $\angle DOE<67°10'<\frac{3}{8}\pi$ ナルコトが知レル。

$$\sin^2 DEO+\sin^2 OEB_4'=\rho^4+\rho^8<1 \ \text{ナル故} \ \angle DEB_4'<\frac{\pi}{2}$$

コノ場合ニハ x^k ハ悉ク $\angle DEB_4'$ 内ニアル。

IV) $\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{3}{4}\pi$

EA_3 ト K_1 円トノ交点ヲ C，OY ト K_1 円トノ交点ヲ F トスル。

$$\sin FEO=\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}<\rho^3=\sin CEO,$$

$$\sin^2 CEO+\sin^2 OEB_3'=\rho^6+\rho^6<1$$

故ニ $\angle CEB_3'<\frac{\pi}{2}$ ニシテ x^k ハ悉クコノ角内ニアル。

V) $\frac{3}{4}\pi\leqq\theta<\frac{5}{6}\pi$ ナル場合

コノ場合 E カラ見テ最大ノ開キヲ見セルノハ $\angle x^2 1 x^3$ デアル。

$x=\rho e^{i\theta}$ トオキ $\rho=0.8820$，$\cos\theta<0$ ナルコトヲ考ヘテ $\tan x^2 1 x^3>0$ ナルコトが計算セラレルカラ

$$\angle x^2 1 x^3<\frac{\pi}{2}$$

VI) $\frac{5}{6}\pi\leqq\theta\leqq\pi$ ナル場合

K_3 円ト OY トノ交点ヲ G トスレバ $\angle GEB_2'<\frac{\pi}{2}$

コノ場合 x^k ハ悉ク $\angle GEB_2'$ 内ニアル。

VII) $\pi < \theta < 2\pi$ ナル場合

今マデノ証明ノx軸ノ上側ト下側トヲ交換シテ考ヘレバヨイ。

會費拂込ハ下記（振替貯金）へ
御願ヒ致シマス

大阪市北區
大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

口座番號　大阪一七七四三番