278. 超越直徑ト測度トノ関係 I

角谷静夫（阪大）

Gauss 平面上ノ有界閉集合Eガ對數的測度0デアレバEハ又超越直徑ガ0ニナルコトハ*Myrberg*ガ*Lindeberg*ノ定理ヲ用ヒテ証明シタ。*

コノ証明ハ調和函数及ビ*Green*ノ函数ノ性質ヲ利用シテキルノデ、次ニ之ヲ直接ニ点集合ノ問題トシテ証明シヨウ。

---

* P. J. Myrberg Acta Math. Bd. 61, 1933.
（又 R. Nevanlinna, 1934年ノStockholmノkongressニ於ケル講演参照）

Eハ對數的測度0デアルカラ任意ノ$\varepsilon>0$ニ對シテ可附番個，シタガッテ *Borel-Lebesgue* ノ定理ニヨリ有限個ノ円C_n（$n=1,2,\cdots\cdots,N$）ニヨッテEヲ覆ッテソノ半径ρ_n（$\rho_n<1$）ガ

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\log\frac{1}{\rho_n}}=\varepsilon'<\varepsilon \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ヲ満足スルヤウニ出來ル。

$$\frac{1}{\varepsilon'}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{\rho_n}}=x_n,\quad n=1,2,\cdots\cdots,N$$

トオキ

$$\left|x_k-y_k\right|<\frac{1}{2N}\left(\min_{1\leqq n\leqq N}x_n\right)\leqq\frac{x_k}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ヲ満足スル有理數y_k（$k=1,2,\cdots\cdots,N-1$）ヲ求メル。

$$y_N=1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k$$

トオケバ$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_N=1$デアルカラ

$$\left|x_N-y_N\right|\leqq\sum_{k=1}^{N-1}\left|x_k-y_k\right|<\frac{1}{2}\left(\min_{1\leqq n\leqq N}x_n\right)\leqq\frac{x_N}{2}\cdots\cdots (3)$$

(2) (3) ヨリ

$$y_n>\frac{x_n}{2}\qquad n=1,2,\cdots\cdots,N\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

y_n（$n=1,2,\cdots\cdots,N$）ハスベテ有理數デアルカラ適當ナ整數Y（コレハ任意ニ大キク取ルコトガ出來ル）ヲトレバYy_n（$n=1,2,\cdots\cdots,N$）ハスベテ整數トナル。

$$P_\nu(z)=(z-z_1)^{\nu y_1}(z-z_2)^{\nu y_2}\cdots\cdots(z-z_N)^{\nu y_N}$$

トオケバ $P_\nu(z)$ ハ z ノ ν 次ノ多項式デアル。ココニ $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N$ ハ夫々円 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_N$ ノ中心デアル。

$z_0 \in E$ ナルトキ $P_\nu(z_0)$ ノ絶對値ヲ計算スル。

$E \subset \sum_{n=1}^{N} C_n$ デアルカラ少クトモ一ツノ n（コレヲ n_0 トスル）ニ對シテ $z_0 \in C_{n_0}$。ヨツテ $R\ (R \geqq 1)$ ヲ E 全体ヲ含ム円ノ半徑トスレバ

$$|P_\nu(z_0)| < (2R)^\nu \rho_{n_0}{}^{\nu y_{n_0}}$$

$$< (2R)^\nu \rho_{n_0}{}^{\nu\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon'}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{\rho_{n_0}}}} \quad \left(\begin{array}{l}\rho_{n_0}<1 \text{ ナルコトト}\\ (4) \text{ トニヨル}\end{array}\right)$$

$$=(2R)^\nu e^{-\nu\cdot\frac{1}{2\varepsilon'}}$$

右辺ハ n_0 ニ無関係デアルカラ z_0 ニモ無関係。ヨツテ

$$\max_{z\in E}|P_\nu(z)| < (2R)^\nu e^{-\nu\frac{1}{2\varepsilon'}}$$

$$\left\{\max_{z\in E}|P_\nu(z)|\right\}^{\frac{1}{\nu}} < 2R\cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon'}} < 2R\cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon}}$$

$\varepsilon>0$ ハ任意デアリ、ν ハイクラデモ大キクトレタカラ之ハ E ノ超越直徑ガ 0 デアルコトヲ示シテ井ル。