275. 多項式ノ既約性ニ就テ（追加）

龍　澤　周　雄（東大學生）

多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ニ於テ

$$|a_n|>|a_0|+\cdots\cdots+|a_{n-1}| \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ナル條件アレバ $f(x)=0$ ノ根ハスベテ單位円ノ外部ニアルカラ a_n ガ素數ナラバ確カニ (1) ハ既約ニナル。若シ $a_0,\cdots\cdots a_{n-1}$ ノ最大公約數ガ 1 デナケレバ次ノ樣ニナル。

定理．　$a_0, a_1, \cdots\cdots a_{n-1}$ ガ共通因子ヲ有スルトキ

$$\sqrt{3}\,|a_n|>|a_0|+\cdots\cdots+|a_{n-1}| \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$a_n=p^m \quad (p\text{素數}) \quad (a_{n-1},a_n)=1$$

ナラバ (1) ハ既約ニナル。

證明．　(1) ガ可約トシテ

$$a_0x^n+\cdots\cdots+a_n=(b_0x^m+\cdots\cdots+b_m)(c_0x^l+\cdots+c_l)$$

トスレバ

$$a_0=b_0c_0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$a_1=b_0c_1+b_1c_0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$a_0, \cdots\cdots a_{n-1}$ ノ共通因子ヲ g トスル。然ルトキ b_0, c_0 ノ何レモ 1 ニナルコトハナイ。例ヘバ $b_0 = 1$ トスレバ (4) ヨリ $g | c_0$, (5) ヨリ $g | c_1$ ---------- トナツテ スベテノ c ガ g デワレルコトニナルガ、ソレハ $g \nmid a_n$ ニ反スル。

然ラバ

$$\left|\frac{b_m}{b_0}\right| \geqq \left|\frac{b_m}{\frac{a_0}{2}}\right| \qquad \left|\frac{c_l}{c_0}\right| \geqq \left|\frac{c_l}{\frac{a_0}{2}}\right| \quad \cdots\cdots (6)$$

サテ $f(x) = 0$ ノ根ヲ如何様ニトツテソノ絶對値ノ積ヲツクルモ

$$\frac{\sqrt{|a_0|^2 + \cdots\cdots + |a_n|^2}}{|a_0|} \quad \cdots\cdots (7)$$

ヲ超エナイ（「高橋氏ノ定理ニ就テ」参考）

今 $a_n = p^m$ $(a_{n-1}, a_n) = 1$ ナル関係アル故 b_m, c_l ノ一方ガ p^m, 他方ガ 1 トナル。ソノ $p_m = a_n$ ニナル方ヲトツテ (6), (7) ヲ考ヘニイレヽバ

$$\frac{\sqrt{|a_0|^2 + \cdots\cdots + |a_n|^2}}{|a_0|} \geqq \frac{2|a_n|}{|a_0|}$$

故ニ

$$2|a_n| > \sqrt{|a_0|^2 + \cdots\cdots + |a_n|^2} \quad \cdots\cdots (8)$$

ナラバ (1) ハ既約ニナル筈デアル. (3) カラ (8) ガ導ケルコトハ明カデアル。